Lineaaralgebra

S.Babitsenko

YMA3710 3,5 AP

2-0-2

TTÜ
Tallinn

1.Комплексные числа.

Опр.: Комплексными числами (к.ч.) называются всевозможные упорядоченные пары z=(x,y) действительных чисел , для которых следующим образом определены операции сложения и умножения :

(1) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$
(2) $(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$

Действительные числа x и y называются *действительной* и *мнимой частями* к.ч z=(x,y) и обозначаются символами x=Rez , y=Imz .

Два к.ч. $z_1=(x_1,y_1)$ и $z_2=(x_2,y_2)$ называются равными в том и только в том случае, если $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

К.ч. z=0 только если x =0 и y=0 одновременно .

Из определений (1) и (2) следует, что всякое к.ч. (x,y) может быть записано следующим образом :

(3) (x,y)= (x,0)+(0,1)(y,0)

Если к.ч. вида (x,0) ≡ x отождествить с действительными числами X,

к.ч вида (0,1) ≡ i обозначим символом i ,

то равенство (3) принимает вид :

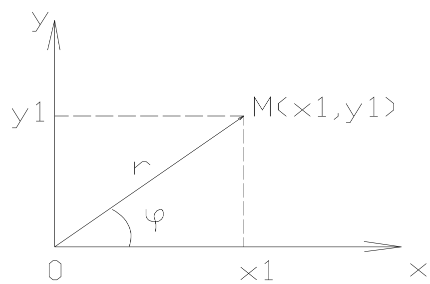
z=x+ iy

и называется *алгебраической формой* к.ч. z=(x,y) .

$i=\sqrt{-1}$ -*мнимая единица*
$i^2=-1$
при y=0 z=x – действительное число
при x=0 z= iy -*чисто мнимое* число .

Комплексные числа $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ отличающиеся знаком мнимой части, называются *комплексно сопряженными*.

Геометрическое изображение комплексного числа.



$z=x_1+iy_1$

Точка М (x_1, y_1) изображает к.ч. $z=x_1+iy_1$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называется *плоскостью комплексной переменной*.

Ось Ох – *действительная* ось,

ось Оу- *мнимая* ось.

Число $r=\sqrt{x^2+y^2}$ называют модулем к.ч. $z=x+iy$ и обозначается $|z|$, длина вектора ОМ (при любых х и у)

(r,φ) –полярные координаты точки М (x_1, y_1).

Тригонометрическая форма записи комплексного числа .

$x_1 = r\cdot\cos\varphi$ $y_1= r\cdot\sin\varphi$ ($r\geq 0$)

при любых х и у

комплексное число $x+iy= r\cos\varphi + i\cdot r\sin\varphi$

(4) $z= r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

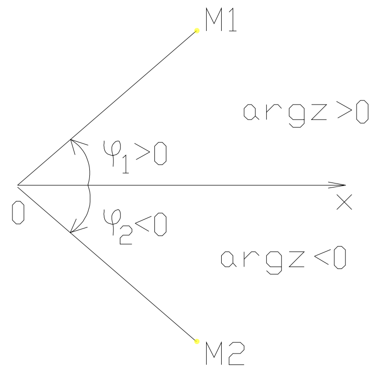
Всякое решение φ системы уравнений

$$\cos\varphi= x/r = x/\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sin\varphi= y/r = y/\sqrt{x^2+y^2}$$

называется *аргументом* к.ч. $z=x+iy\neq 0$

Все аргументы к.ч. z различаются на $2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ и обозначаются $\varphi=\arg z$.
Главное значение аргумента $0\leq \arg z<2\pi$ или $-\pi<\arg z\leq\pi$



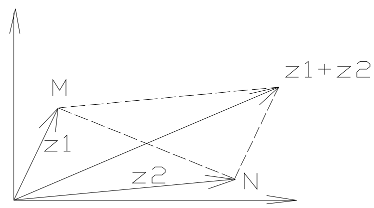
действительное число в виде (4) :

$p=|p|(\cos 0+i\sin 0)$, если $p>0$
$p=|p|(\cos\pi+i\sin\pi)$, если $p<0$

Основные действия над комплексными числами .

1) $z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$
$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

2) $|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=|MN|$,
расстояние между точкой M и точкой N .



3) умножение

$$z_1 \cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$z_1 \cdot z_2= r_1 \cdot (\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \cdot r_2 \cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$r_1 \cdot r_2 [(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]=$$
$$r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

(5) $z_1 \cdot z_2= r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

модуль= произведению модулей
аргумент= сумме аргументов

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$$

4) деление

$z_1=x_1+iy_1$ $\qquad$ $z_2=x_2+iy_2$ $\qquad$ $|z_2|=\sqrt{x^2_2+y^2_2} \neq 0$

(6) $z= (x_1+iy_1)/(x_2+iy_2)= [(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)]/ [(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)]=$

$(x_1 \cdot x_2+ y_1 \cdot y_2)/(x^2_2+y^2_2) + i \cdot [(x_2 \cdot y_1- x_1 \cdot y_2)/ (x^2_2+y^2_2)]$;

$(x_1 \cdot x_2+ y_1 \cdot y_2)/(x^2_2+y^2_2)= x = \mathrm{Re} z$

$[(x_2 \cdot y_1- x_1 \cdot y_2)/ (x^2_2+y^2_2)] = y= \mathrm{Im} z$

(7) $z = z_1 / z_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] / [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$

$r_1 / r_2\, [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

NB! проверка умножением

модуль=частному модулей $\mu = r_1 / r_2$
аргумент= разности аргументов делимого и делителя $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

Результатом деления является тоже комплексное число !

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

5) возведение в степень

(8) $z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi]$ - формула Муавра

(n- целое, положительное число)

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$

=>Бином $(a+b)^3 \;\|\rightarrow \begin{cases} \cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ \sin 3\varphi = -\sin^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi \end{cases}$

$i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$ и т.д.

$i^{4к} = 1$; $i^{4к+1} = i$; $i^{4к+2} = -1$; $i^{4к+3} = -i$ - степени мнимой единицы

6) извлечение корня n-ой степени

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\phi + i\sin\phi)} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
возведем в степень n арифметическое значение корня, т.е. +, действительное

$$\begin{cases} r=\rho^n \\ n\Theta=\varphi+2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho=\sqrt[n]{r} \leftarrow \\ \Theta=(\varphi+2k\pi)/n \end{cases}$$

(9) $$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)\right)$$

$k=0,1,2,\ldots,n-1$

Показательная форма комплексных чисел

$e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+\ldots$ (1)

$n!=n(n-1)(n-2)\ldots\cdot1$

$\sin x=x-x^3/3!+x^5/5!-\ldots$ (2)

$\cos x=1-x^2/2!+x^4/4!-\ldots$ (3)

$e^z=1+z+z^2/2!+z^3/3!+\ldots$ (4)

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

(2),(3) $\Rightarrow z=r\{(1-\varphi^2/2!+\varphi^4/4!-..)+i(\varphi-\varphi^3/3!+\varphi^5/5!-\ldots)\}=r(1+i\varphi-\varphi^2/2!-$
$-i\varphi^3/3!+\varphi^4/4!+i\varphi^5/5!\ldots)$

$e^{i\varphi}=1+i\varphi+i^2\varphi^2/2!+i^3\varphi^3/3!+\ldots=1+i\varphi-\varphi^2/2!-i\varphi^3/3!+\ldots$

следовательно

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r\,e^{i\varphi} \quad (5)$$

формулы Эйлера:

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ $\Big\| \longrightarrow$ $\cos\varphi=(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})/2$

$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$ $\qquad\sin\varphi=(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})/2i$

формула Муавра :

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$$
$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Формула извлечения корня степени n из комплексного числа.

$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot [(\varphi+2k\pi)/n]}$

$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos [(\varphi+2k\pi)/n] + i \sin [(\varphi+2k\pi)/n])$

$k=0,1,2,..., n-1$

2. Детерминанты (Определители)

2.1. Определители 2-го порядка.

Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными .

(1) $a_1x+b_1y= h_1$ (1) $\times$ b_2 - (2) $\times$ b_1

(2) $a_2x+b_2y= h_2$

$(a_1b_2-a_2b_1)x=h_1b_2-h_2b_1$
$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1h_2-a_2h_1$

при $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$, единственное решение :

$x=(h_1b_2-h_2b_1)/(a_1b_2-a_2b_1)$; $y=(a_1h_2-a_2h_1)/(a_1b_2-a_2b_1)$

Таблица к-ов при неизвестных – *определитель системы* или *детерминант*.

a_1, a_2 , b_1 , b_2 –*элементы определителя*

$D = \Delta = |a_1$

$$D = \Delta = \begin{pmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{pmatrix}$$

$$D := a1b2 - a2b1$$

$$Dx = \Delta x = \begin{pmatrix} h1 & b1 \\ h2 & b2 \end{pmatrix}$$

$$Dx := h1b2 - h2b1$$

$$Dy = \Delta y = \begin{pmatrix} a1 & h1 \\ a2 & h2 \end{pmatrix}$$

$$Dy := h2a1 - a2h1$$

Правило Крамера : Если $\Delta \neq 0$, система линейных уравнений имеет единственное решение $x=\Delta x/\Delta$; $y=\Delta y/\Delta$.
Если $\Delta=0$, а $\Delta x=\Delta y=0$, то система имеет бесконечное множество решений (уравнения линейно зависимы).
Если $\Delta=0$, а $\Delta x\neq 0$, $\Delta y\neq 0$, система не имеет решений.
Если $h1= h2=0$, то система *однородная*.

Она всегда имеет *тривиальное* (нулевое) решение $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Если $\Delta\neq 0$, то это решение единственное,
Если $\Delta=0$, то система с бесконечным множеством решений .

2.2 Определители третьего порядка.

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$
$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$

$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$

$$D = \Delta = \begin{pmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{pmatrix}$$

если $\Delta\neq0$, то единственное решение $x=\Delta x/\Delta$; $y=\Delta y/\Delta$; $z=\Delta z/\Delta$

Правило Саррюса (правило треугольников) – вычисление численного значения детерминанта(определителя).

Det $D= a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3$

2.3. Определители высших порядков.

$$D = \begin{pmatrix} a11 & a12 & \cdot & a1n \\ a21 & a22 & \cdot & a2n \\ a31 & a32 & \cdot & a3n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ an1 & an2 & \cdot & ann \end{pmatrix}$$

aij- элемент определителя

Миноры и алгебраические дополнения.

Опр.: Минором M_{ij} элемента aij определителя , называется новый определитель, который получают из старого вычеркиванием строки и столбца , проходящих через данный элемент.

Опр.: Алгебраическим дополнением элемента aij называется минор M_{ij} взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Вычисление определителя .

а) метод понижение порядка.
Разложение определителя по элементам строки или столбца: определитель равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраическое дополнение:

$\det D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$
$i = 1, \ldots, n$
или
$\det D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$
$j = 1, \ldots, n$

б) метод приведения к треугольному виду .

$$D = \begin{pmatrix} a11 & a12 & \vdots & a1n \\ 0 & a22 & \vdots & a2n \\ 0 & 0 & \vdots & a3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & ann \end{pmatrix}$$

$D = a11 \cdot a22 \cdot a33 \cdot \ldots ann$

Нулевые элементы ниже или выше главной диагонали.

2.4. Свойства определителей.

1). Значение определителя не изменится, если его строки заменить столбцами (транспонирование) - D^T.
2). Определитель n-ого порядка, у которого 2 строки (2 столбца) одинаковы, *равен нулю* .
3). Если все элементы какой-нибудь строки (столбца) умножить на m , то численное значение опредителя измениться в m раз.
4). Если элементы строки(столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести сомножителем за определитель.
5). Определитель у которого элементы двух строк(столбцов) пропорциональны *равен нулю*.
6). Если все элементы строки (столбца) состоят из двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей.
7).Численное значение определителя n-ого порядка не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить элементы другой строки(столбца), умноженные на одно и то же число и результат записать вместо строки (столбца) к которой прибавляли.
8). Если поменять местами две строки(столбца) , то знак определителя изменится на противоположный : с «+» на «-» и с «-» на «+» .

2.5. Умножение определителей.

$$\underset{\Delta 1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \bullet & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \bullet & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \bullet & a_{3n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ a_{n1} & a_{n2} & \bullet & a_{nn} \end{vmatrix}} \cdot \underset{\Delta 2}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \bullet & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \bullet & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & \bullet & b_{3n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ b_{n1} & b_{n2} & \bullet & b_{nn} \end{vmatrix}} = \underset{\Delta 3}{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \bullet & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \bullet & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & \bullet & c_{3n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ c_{n1} & c_{n2} & \bullet & c_{nn} \end{vmatrix}}$$

где

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+...+a_{in}b_{nj}$
$i,j=1,2,...n$

элементы i-ой строки Δ1умножают на элементы j-го столбца Δ2 и все эти произведения сложить. Результат записывают в строку определителя Δ3.

3. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & \cdots & a1n \\ a21 & a22 & \cdots & a2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ am1 & am2 & \cdots & amn \end{pmatrix}$$

Опр.: матрицей размером m на n называется совокупность $m \cdot n$ чисел aij , расположенных в *прямоугольной таблице* из m строк и n столбцов.

Числа aij называют элементами матрицы.
i=1,2,.., m - индекс строки (номер строки)
j=1,2,..., n – индекс столбца (номер столбца)

Матрицу обозначают : $A=(a_{ij})$ или $A=\| a_{ij} \|$.

Матрица размером n на n называют *квадратной матрицей* порядка n . Матрица ,состоящая из одной строки (столбца) называют *строчной(столбцевой)* матрицей.Две матрицы $A=\| a_{ij}\|$ и $B=\| b_{ij} \|$ называются равными если $a_{ij}=b_{ij}$ для каждых i,j.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица 3 x 3 матрица 2 x 3 матрица 1 x 3

Суммой матриц A и B называется матрица C с элементами $c_{ij}= a_{ij}+b_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

A+B=B+A - сложение матриц коммутативно
A+(B+C)=(A+B)+C - сложение матриц ассоциативно

Произведением матрицы A на число 2 называется матрица, элементами которой являются числа $2 \cdot a_{ij}$.
Пример:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Произведением матрицы A размером m x n и матрицы B размером n x p называется матрица C=A · B размером m x p с элементами

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}$$

матрицы заданы в определенном порядке (первая и вторая) и размеры их связаны определенным условием :
число столбцов первой матрицы = *числу строк* второй .
Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 38 \end{pmatrix}$$

NB! $A \cdot B \neq B \cdot A$ - произведение матриц не коммутативно !
(даже для квадратных матриц)

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 14 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$

Транспонирование матриц – обозначается значком ' или $^{\mathrm{T}}$.
$\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$ - Элементы каждой строки матрицы В записываются в том же порядке в столбцы матрицы B^{T}, номер столбца совпадает с номером строки.

$(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})' = \mathrm{B}' \cdot \mathrm{A}'$ или $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

$(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{C})' = \mathrm{C}' \cdot \mathrm{B}' \cdot \mathrm{A}'$ или $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{C})^{\mathrm{T}} = \mathrm{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Если квадратная матрица А и её транспонированая матрица A^{T} одинаковы, то А называют симметричной матрицей.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & 9 \\ 2 & 9 & 13 \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 6 & 9 \\ 2 & 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Детерминант (определитель) квадратной матрицы- это *число, которое ей сопоставлено* и может быть вычислено по её элементам.
Выделим в матрице k строк и k столбцов, определитель k-ого порядка, стоящий на пересечении этих строк и столбцов, называется *определителем* или *минором* k-ого порядка матрицы.

Каждому элементу матрицы может быть поставлен в соответствие определитель первого порядка.

Рангом матрицы А называется наивысший порядок её определителей отличных от нуля.
Целое число r>0 называется рангом матрицы А , если среди определителей r-ого порядка , соответствующих матрице,есть хотя бы один отличный от нуля , а все определители более высокого порядка равны нулю.

Два способа вычисления ранга матрицы .

1. Метод окаймления.

Рассмотрим все определители второго порядка и если хотя бы один из них $\neq 0$, то окаймляем его строками и столбцами матрицы и получаем определитель третьего порядка, если *все они* равны нулю, то r=2 ; если хотя бы один из них $\neq 0$, то окаймляем его до определителя четвертого порядка и т.д.

Ранг матрицы А не изменяется при следующих элементарных преобразованиях матрицы :

1. умножение всех элементов строк(столцов) на любое не равное 0 число.
2. перестановка двух столбцов или строк.
3. прибавление ко всем элементам строки или столбца параллельного ряда , умноженного на одно и то же число.

Пример: определить ранг матрицы методом окоймления.

$$M=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & -3\\ 2 & -1 & 3 & 0\\ 4 & 5 & -5 & -6\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 5 & -5\end{vmatrix}\overset{\text{3 ст.+2ст.}}{=}\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 5 & 0\end{vmatrix}\overset{\text{2стр.-1стр}\cdot 2}{=}\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ -4 & -5 & 0\\ 4 & 5 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 5 & -6\end{vmatrix}\overset{\text{1ст.+2ст.}\cdot 2}{=}\begin{vmatrix}7 & 2 & -3\\ 0 & -1 & 0\\ 14 & 5 & -6\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}7 & -3\\ 14 & -6\end{vmatrix}=0$$

$$r=2$$

2. Способ вычисления ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

Ранг матрицы М не изменяется при элементарных преобразованиях. Необходимо преобразовать матрицу к матрице, у которой все элементы ниже или выше главной диагонали равны 0 и только элементы одной или нескольких строк (столбцов) не равны 0, тогда ранг матрицы М равен *числу ненуле-вых* элементов *на главной диагонали*.

Пример:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 8 & 13 & 16\\ 1 & 0 & -7 & -14 & -17\end{pmatrix}\overset{\text{3,4стр-1стр; 2стр-1стр}\cdot 2}{\approx}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & -5 & -9 & -11\\ 0 & 1 & 5 & 9 & 11\\ 0 & -2 & -10 & -18 & -22\end{pmatrix}\overset{\text{2ст-1ст}\cdot 2\text{;3ст-1ст}\cdot 3\text{;4ст-1ст}\cdot 4\text{;5ст-1ст}\cdot 5}{\approx}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -5 & -9 & -11\\ 0 & 1 & 5 & 9 & 11\\ 0 & -2 & -10 & -18 & -22\end{pmatrix}\approx$$

$$\overset{\text{3стр+2стр}}{\approx}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -5 & -9 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{\text{3,4,5ст-2ст}\cdot\text{5,9,11}}{\approx}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

⇨ r=2.

Единичная и обратная матрицы.

Единичной матрицей порядка n называется квадратная матрица E порядка n , обладающая следующим свойством :
$A \cdot E = E \cdot A = A$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица A называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю ($|A|=0$), и *невырожденной* , если $|A| \neq 0$.

Обратной матрицей квадратной матрицы A порядка n, называется квадратная матрица A^{-1} того же порядка ,обладающая свойством $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.
Где E – единичная матрица.
NB! Вырожденная матрица не имеет обратной.

2 способа нахождения обратной матрицы:
1) а.вычислить определитель $|A|$ ($\det|A|$);
б.записать A^T ;
в.составить присоединенную матрицу $\tilde{A}=(A_{ji})$, заменив элементы транспонированной матрицы A^T алгебраическими дополнениями к ее элементам a_{ji}.
г.вычислить обратную матрицу $A^{-1}=(1/\det|A|) \cdot \tilde{A}$
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

2) Любую невырожденную матрицу A путем элементарных преобразований только строк или только столбцов, можно привести к единичной матрице E. Применяя ту же последовательность преобразований к матрице E получим матрицу A^{-1}.
Пример :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

3.2 Решение матричных уравнений.

$A\cdot \chi = B$; $\gamma\cdot A = B$ — A,B-заданы матрицей

χ, γ-искомые матрицы

Для невырожденной матрицы A

$A^{-1}\cdot A\cdot\chi = A^{-1}\cdot B$ $\quad$ $\gamma\cdot A\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1}$

$A^{-1}\cdot A = E$ $\quad$ $A\cdot A^{-1} = E$ $\quad$ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$\chi = A^{-1}\cdot B$ $\quad$ $\gamma = B\cdot A^{-1}$

$A\cdot\chi\cdot B = C$

$A^{-1}\cdot A\cdot\chi\cdot B\cdot B^{-1} = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$

$A^{-1}\cdot A = E$

$B\cdot B^{-1} = E$

$E\cdot\chi\cdot E = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$

$\chi = A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$

Пример :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \chi \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \chi \cdot B = C$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & \frac{-5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Системы линейных уравнений.

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad m \neq n$$

(2) $A \cdot \chi = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & \cdots & a1n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ am1 & am2 & \cdots & amn \end{pmatrix} \qquad \chi = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ xn \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ bm \end{pmatrix}$$

Решение системы — n компонентный вектор столбец χ, обращающий (2) в равенство.
(также арифметич.вектор $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, x_i-компоненты),
нулевой вектор $0=(0,0,\ldots,0)$

Опр.: Система (1) называется *совместной*, если она имеет по меньшей мере одно решение и *несовместной*, если не имеет решений.
Система (1) называется *определенной*, если имеет одно решение и *неопределенной*, если бесконечное множество решений.
Две системы называются *эквивалентными*(равносильными), если множества их решений совпадают.
А-матрица системы

$\tilde{A}=(A|B)$ –*расширенная* матрица.

Теорема Кронекера-Капелли.

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда $rang A = rang \bar{A}$ $(r_A = r_{\bar{A}})$.
Если система (1) совместна, то она является определенной, если $r_A = n$ и неопределенной, если $r_A < n$.
а) $r_A = r_{\bar{A}} = n$ – у (1) единственное решение $x_i = \Delta_i/\Delta$
б) пусть $r_A = r_{\bar{A}} < n$ – число уравнений < числа неизвестных.

Считаем, что базисный минор находится в первых r строках и столбцах матрицы A.
Отбросив последние m-r уравнений системы (1) запишем *укороченную* систему :

$$(3)\quad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{array}$$

$x_1,\ldots,x_r$ – базисные неизвестные
$x_{r+1},\ldots,x_n$ – свободные неизвестные
$x_{r+1}=c_1,\ldots,\ x_n=c_{n-r}$

$$(4)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots . a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots . a_{rn}x_n \end{cases}$$

Общее решение системы (1) $\chi(c_1,\ldots,c_{n-r})$:

$$\chi(c_1,\ldots,c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1,\ldots c_{n-r} \\ \bullet \\ x_r(c_1,\ldots,c_{n-r} \\ c_1 \\ \bullet \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

Метод последовательных исключений Жордана-Гаусса.

С помощью элементарных преобразований *только над строками* и *перестановкой столбцов* расширенная матрица Ā системы (1) может быть приведена к виду :

$$(5)\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & a'_{1,r+1} & ... & a'_{1,n} & \bullet & b'_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & a'_{2,r+1} & ... & a'_{2,n} & \bullet & b'_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \bullet & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & a'_{r,r+1} & ... & a'_{r,n} & \bullet & b'_r \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & \bullet & b'_{r+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & \bullet & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & \bullet & b'_m \end{pmatrix}.$$

Эта матрица является расширенной матрицей системы:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1,r+1} \cdot x_{r+1} + ... + a'_{1n} x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1} \cdot x_{r+1} + ... + a'_{2n} x_n = b'_2 \\ x_r + a'_{r,r+1} \cdot x_{r+1} + ... + a'_{rn} x_n = b'_r \\ 0 = b'_{r+1} \\ .... \\ 0 = b'_m \end{cases}$$

которая с точностью до обозначения неизвестных *эквивалентна* исходной системе (1).

Если хотя бы одно из чисел b_{r+1}', ...,$b_m' \neq 0$, то система (6), а следовательно и (1) *несовместны*.
Если b_{r+1}', ...,b_m' =0 все, то система совместна и формулы (6) дают явное выражение для базисных неизвестных x_1, ...,x_r через свободные неизвестные x_{r+1},...,x_n .

Пример: Методом Жордана-Гаусса найти общее решение системы.

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad - 2x_2 \quad + x_4 &= -3\\
3x_1 - x_2 - 2x_3 \quad &= 1\\
2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 4\\
x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 7
\end{aligned}
$$

4стр-1стр; 2стр-1стр·3; 3стр-1стр·2 3стр-2стр; 4стр-2стр

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & \vdots & -3\\ 3 & -1 & -2 & 0 & \vdots & 1\\ 2 & 1 & -2 & -1 & \vdots & 4\\ 1 & 3 & -2 & -2 & \vdots & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & \vdots & -3\\ 0 & 5 & -2 & -3 & \vdots & 10\\ 0 & 5 & -2 & -3 & \vdots & 10\\ 0 & 5 & -2 & -3 & \vdots & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & \vdots & -3\\ 0 & 5 & -2 & -3 & \vdots & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}
$$

2стр/5;1стр+2стр·2

$$
\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-4}{5} & \frac{-1}{5} & \vdots & 1\\ 0 & 1 & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} & \vdots & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}
$$

(6) $$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 1\\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = 2 \end{cases}$$

x_1, x_2 –базисные неизвестные

$x_3 = c_1; x_4 = c_2$ – свободные неизвестные

$$
\chi(c1, c2) = \begin{pmatrix} x1\\ x2\\ x3\\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{5}c1 + \frac{1}{5}c2\\ 2 + \frac{2}{5}c1 + \frac{3}{5}c2\\ c1\\ c2 \end{pmatrix}
$$

Система линейных однородных уравнений.

(7) $A \cdot \chi = 0$ Однородная система всегда совместна т.к. имеет тривиальное решение

$$
\chi = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \vec{0} \;\; (0, .., 0)
$$

Если $r_A=n$, то тривиальное решение-единственное.
Если $r_A<n$, то помимо тривиального система имеет бесконечно множество других ненулевых решений, (n-r) неизвестных будут свободными.
Среди бесконечного множества решений системы выделяется фундаментальная система решений(свободным неизвестным придается поочередно значение 1, полагая остальные равными нулю).Любое другое решение является линейной комбинацией фундаментальной системы решений.
Если $r_A=n$, то фундаментальной системы решений (ф.с.р.) не существует.

Пример:1) найти ф.с.р. и общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Здесь x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – неизвестные переменные (координаты вектора)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix}$$ матрица A имеет $r_A=2$

Выберем в качестве базисного минора $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, тогда

укороченная система →

$$\begin{aligned} 3x1 + x2 &= 8x3 - 2x4 - x5 \\ 2x1 - 2x2 &= 3x3 + 7x4 - 2x5 \end{aligned}$$

полагаем $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, $x_5=c_3$
находим

$$x1 = \frac{-19}{8}c1 - \frac{3}{8}c2 + \frac{1}{2}c3$$

$$x2 = \frac{-7}{8}c1 + \frac{25}{8}c2 - \frac{1}{2}c3$$

общее решение системы :

$$\chi(c1c2c3) = \begin{pmatrix} \frac{-19}{8}c1 - \frac{3}{8}c2 + \frac{1}{2}c3 \\ \frac{-7}{8}c1 + \frac{25}{8}c2 - \frac{1}{2}c3 \\ c1 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix}$$

Ф.С. Р.

$$E1 = \chi(1,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{-19}{8} \\ \frac{-7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E2 = \chi(0,1,0) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{8} \\ \frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E3 = \chi(0,0,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

общее решение через ф.с.р.

$\chi(c_1,c_2,c_3)=c_1E_1+c_2E_2+c_3E_3$

2) найти ф.с.р.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \overset{2стр-1стр\cdot 2;3стр-1стр\cdot 3;4стр-1стр}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{4стр+2стр;3стр-2стр\cdot 2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{1стр-2стр}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

r=2

укороченная система уравнений :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{-3}{2}x_1 - 2x_4 - 4x_5 \\ x_3 = x_4 + 3x_5 \end{cases}$$

x1=c1	c1	c2	c3
x4=c2	1	0	0
x5=c3	0	1	0
	0	0	1

общее решение :

$$\chi = \begin{pmatrix} c1 \\ \frac{-3}{2}c1 - 2c2 - 4c3 \\ c2 + 3c3 \\ c2 \\ c3 \end{pmatrix}$$

ф.с.р. :

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \chi = c_1\chi_1 + c_2\chi_2 + c_3\chi_3$$

4. n-мерные арифметические векторы и линейная зависимость.

$\bar{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ - упорядоченая совокупность n чисел

$a_1,\dots,a_n$ - компоненты вектора

n - размерность вектора .

Строку или столбец матрицы можно рассмотреть как n –мерный вектор.

$\vec{a}=\vec{b}$,если $a_1=b_1, a_2=b_2, \ldots$

$\vec{a}+\vec{b}=(a1+b2, a2+b2, \ldots, an+bn)$ - размерность векторов одинакова

$c\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot c=(ca1, ca2, \ldots, can)$

$\vec{a}-\vec{a}=(0,0,0,\ldots,0)$ - нулевой вектор

$-\vec{a}$ - вектор противоположный вектору $\vec{a}$

Опр.: Множество всех действительных арифметических n-компонентных векторов с введенными операциями сложения и умножения на число называется пространством арифметических векторов , обозначается R^n .

Система, состоящая из m n-мерных векторов $\vec{a1}, \vec{a2}, \ldots, \vec{am}$, называется *линейно зависимой*, если можно подобрать такие числа $c_1, c_2, \ldots, c_m$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, так что : $(1)\quad c1\cdot\vec{a1}+c2\cdot\vec{a2}+\ldots+cm\cdot\vec{am}=0$

Если (1) выполняется лишь при $c_1=c_2=\ldots=c_m=0$, то система векторов *линейно независима*.

Пример :

$\vec{a}1=(1,3,3)\quad \vec{a2}=(1,1,1)\quad \vec{a3}=(-2,-4,-4)$

$\vec{a1}+\vec{a2}+\vec{a3}=0$

$\vec{a1}, \vec{a2}, \vec{a3}$ - линейно зависимы

Замечание: а) если система m n-мерных векторов $\vec{a1}, \vec{a2}, \ldots, \vec{am}$ *линейно независима*, то любая часть этой системы *линейно независима.*

б) если $\vec{b}=k1\cdot\vec{a1}+k2\cdot\vec{a2}+\ldots+km\cdot\vec{am}$, то вектор $\vec{b}$ линейно выражается через $\vec{a1}, \vec{a2}, \ldots, \vec{am}$. Если система векторов *линейно зависима*, то каждый вектор линейно выражается через остальные $\vec{a1}=-\vec{a2}-\vec{a3}$.

Опр.: *Рангом* системы n-мерных векторов называют максимальное число линейно независимых векторов этой системы. Ранг системы векторов состоящей из нулевых векторов, равен нулю.

Если ранг системы n-мерных векторов $\vec{a1}, \vec{a2}, ..., \vec{am}$ равен r, r≥1, то в системе существуют r линейно независимых векторов , через которые линейно выражается каждый вектор системы.

1. составить матрицу А строками (или столбцами) которой являются компоненты векторов системы.

2.определить r_A=? $\Delta_r \neq 0$

r строк матрицы А, на которой лежит элементы Δ будут линейно независимы, а остальные строки будут через них выражаться.

Пример :

$$\vec{a}1 = (1, 4, 1, 1)$$

$$\vec{a2} = (2, 3, -1, 1)$$

$$\vec{a3} = (1, 9, 4, 2)$$

$$\vec{a4} = (1, -6, -5, -1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 2 \\ 1 & -6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \neq 0 \quad r = 2$$

D1,D2,D3,D4=0=> вектора $\vec{a1}, \vec{a2}$ -линейно независимы, $\vec{a3}, \vec{a4}$ выразить через $\vec{a1}, \vec{a2}$.

$$\vec{a3} = k1 \cdot \vec{a1} + k2 \cdot \vec{a2}$$

$(1,9,4,2)=k_1\cdot(1,4,1,1)+k_2\cdot(2,3,-1,1)$

$(1,9,4,2)=(k_1+2k_2,4k_1+3k_2,k_1-k_2,k_1+k_2)$

$k_1+2k_2=1$

$4k_1+3k_2=9$ $\quad k_1=3$

$k_1-k_2=4$ $\quad k_2=-1$

$k_1+k_2=2$

Ответ : $\vec{a3} = 3 \cdot \vec{a1} - \vec{a2}$

аналогично :

$$\vec{a4} = 2 \cdot \vec{a2} - 3 \cdot \vec{a1}$$

Опр.: Пусть Q- произвольное множество арифметических векторов.Система векторов $B = \left(\vec{e1},\ ..,\vec{es}\right)$ называется базисом в Q, если выполнены 3 условия :

а) $\bar{e}_k$ЄQ (k=1,2,...,s),т.е. множество векторов $\bar{e}_k$ -подмножество Q.

б)система $B = \left(\vec{e1},\ ..,\vec{es}\right)$ *линейно независима.*

в) для любого вектора $\vec{x}$ ЄQ существуют λ1,...,λs такие что

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^{s} \lambda k \cdot \vec{ek} \qquad (2)$$

(2)- разложение вектора $\vec{x}$ по базису B.

Коэффициенты λk=λ_k называются *координатами* этого вектора в базисе B.

! 1. Всякая система векторов QЄR^n имеет *по меньшей мере один базис*.Все базисы этой системы состоят из одинакового числа векторов, называемого *рангом* системы Q и обозначаемого rangQ или r(Q).

! 2. Ранг всего пространства R^n равен n и называется *размерностью* этого пространства, при этом за базис можно взять следующую систему векторов :

$$(3)\quad \begin{aligned} &\vec{e1} = (1,0,0,.\,,0)\\ &\vec{e2} = (0,1,0,..\,,0)\\ &\vec{e3} = (0,0,1,..\,,0)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\vec{en} = (0,0,0,....,1) \end{aligned}$$

Этот базис принято называть каноническим.

Зафиксируем *произвольный* базис B=($\bar{e}_1$,$\bar{e}_2$,...,$\bar{e}_n$) в просторанстве R^n.

Тогда всякому вектору $\vec{x}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие *столбец его координат* в этом базисе, т.е.

$$\chi = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ \vdots \\ xn \end{pmatrix}$$

или $\vec{x} = x1 \cdot \vec{e1} + ... + xn \cdot \vec{en}$

Замечание : необходимо различать *компоненты* вектора и его *координаты* в некотором базисе.

! Мы используем для них одинаковые обозначения, хотя *следует помнить* , что *координаты* вектора совпадают с его *компонентами* только в *каноническом* базисе.

Пусть $B=(\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n)$ и $B'=(\bar{e}_1',\bar{e}_2',...,\bar{e}_n')$ два различных базиса в Q Є R^n. Каждый из векторов базиса B' разложим по базису B:

$\bar{e}_k' = t_{1k}\bar{e}_1+\ldots+ t_{nk}\bar{e}_n$ $\Leftrightarrow$

$$E^1k = \begin{pmatrix} t1k \\ t2k \\ \vdots \\ tnk \end{pmatrix} \quad (k=1,...,n)$$

Матрицей перехода $T_{B \to B'}$ от базиса B к базису B' называется матрица :

$$T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

, k-ый столбец которой есть столбец E_k' координат вектора $\bar{e}_k'$ в базисе B. Если $\vec{x}$ Є Q - произвольный вектор из Q χ и χ' –столбцы его координат в базисах B и B'соответственно, то

(4) $\chi'=(T_{B \to B'})^{-1}\cdot\chi$

! *Формула преобразования координат* при преобразовании базиса.

Пример : Найти координаты геометрического вектора $\vec{x} = -\vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$ в базисе B' , состоящем из векторов : $\vec{e_1} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{e_2} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{e_3} = \vec{i} + \vec{k}$.

Решение : Координаты векторов $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ в исходном базисе $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$E_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно матрица перехода :

$$T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ищем $T_{B \to B'}^{-1}$ и используем (4) :

$$\chi' = (T_{B \to B'})^{-1} \cdot \chi = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$, т.е. $\vec{x} = 2 \cdot \left(\vec{e}\right)'_2 - \vec{e}'$

Базис 1) $\bar{e}_k$ Є Q упорядоченная система векторов $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_s)$ называется базисом в произвольном множестве векторов линейного векторного пространства.

2) система $B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_s)$ линейно независима.

3) для любого $\vec{x}$ Є Q существуют $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_s$ такие ,что $\vec{x} = \sum_{k=1}^{s} x_k \cdot \vec{e}_k$ - разложение вектора $\vec{x}$ по базису B. x_k –координаты вектора в базисе B.

$B = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)$ и $B' = (\bar{e}_1', \bar{e}_2', ..., \bar{e}_n')$ два различных базиса

$\bar{e}_{k'} = t_{1k}\bar{e}_1 + \ldots + t_{nk}\bar{e}_n$ (k=1,...,n) . Матрица перехода $T_{B \to B'}$ от базиса B к базису B'.

$$T_{B \to B'} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdot & t_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{n1} & \cdot & t_{nn} \end{pmatrix}$$ χ –столбец координат вектора $\vec{x}$ в базисе B.

Формула преобразования координат:

$\chi' = (T_{B\to B'})^{-1}\cdot\chi$ $\qquad$ χ'- столбец координат вектора $\vec{x}$ в базисе B'.

При приобразовании базиса :

$T_{B'\to B} = (T_{B\to B'})^{-1}$

$T_{B\to B''} = T_{B\to B'}\cdot T_{B'\to B''}$

1.Векторы $\bar{e}_1{}',\bar{e}_2{}',\dots,\bar{e}_n{}'$ и $\vec{x}$ заданы своими координатами в некото-ром базисе B. Найти столбец координат χ' вектора $\vec{x}$ в базисе B'.

$$\vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \vec{e2}' = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \quad \vec{e3}' = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \chi = \begin{pmatrix}6\\9\\14\end{pmatrix}$$

решение :

$$T_{B\to B'} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = A \qquad \chi' = (T_{B\to B'})^{-1}\cdot\chi$$

detA=-1

$$A^T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\chi' = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\9\\14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

2. В пространстве R^n векторы $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\dots,\bar{e}_n$ и $\bar{e}_1{}',\bar{e}_2{}',\dots,\bar{e}_n{}'$ заданы своими координатами в некотором базисе B''. Составить матрицу перехода $T_{B\to B'}$.

Решение:

$$T_{B\to B'}=T_{B\to B''}\cdot T_{B''\to B'}$$

$$T_{B''\to B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}=A$$

$$\det A=1\qquad A^{T}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&3\\3&7&1\end{pmatrix}$$

$$T_{B\to B''}=(T_{B''\to B})^{-1}=A^{-1}=?$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$T_{B''\to B'}=\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}$$

$$T_{B\to B'}=T_{B\to B''}\cdot T_{B''\to B'}=\begin{pmatrix}-18&7&5\\5&-2&-1\\3&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27&-71&-41\\9&20&9\\4&12&8\end{pmatrix}$$

*Являются ли системы векторов линейно зависимыми или линейно независимыми?

$$\vec{x}_1=(1,1,1,1)$$
$$\vec{x}_2=(1,-1,-1,1)$$
$$\vec{x}_3=(1,-1,1,-1)$$
$$\vec{x}_4=(1,1,-1,-1)$$

2,3,4стр-1стр　　3стр-2стр　　4стр+3стр

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-2&0\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-2&0\\0&0&2&-2\\0&0&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-2&-2&0\\0&0&2&-2\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\qquad r=4$$

система четырех векторов линейно независима .

$$\vec{x}_1 = (4,-5,2,6)$$
$$\vec{x}_2 = (2,-2,1,3)$$
$$\vec{x}_3 = (6,-3,3,9)$$
$$\vec{x}_4 = (4,-1,5,6)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \overset{\text{1,3,4стр-2стр*2,3,2}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{3стр+1стр*3}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{4стр+2стр*3}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r = 3$$

система четырех векторов линейно зависима.

5. Характеристические числа и собственные векторы .

Пусть А-квадратная матрица порядка n, Е-единичная матрица того же порядка.

$$(A-\lambda E)= \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$ - *характеристическая матрица*

$$\det |A-\lambda E| = (-1)^n\left(\lambda^n + \psi_1\lambda^{n-1} + ... + \psi_{n-1}\cdot\lambda + \psi_n\right)$$ - *характеристический многочлен* матрицы А.

$\psi_1,\dots,\psi_n$ – const

уравнение $\det |A-\lambda E| = 0$ или $\lambda^n + \psi_1\cdot\lambda^{n-1} + ... + \psi_{n-1}\cdot\lambda + \psi_n = 0$ называется *характеристическим уравнением*, а его корни - (λ_i)- *характеристическими числами*(или *собственными числами*) матрицы А. Ненулевой вектор $\vec{x}$ n- мерного линейного пространства называется *собственным вектором* матрицы А, если $A\cdot\vec{x} = \lambda\cdot\vec{x}$ или $A\chi = \lambda\chi$;

$$\chi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ Пусть λ – один из корней характеристического уравнения.

Соответствующие ему собственные векторы $\vec{x}$ определяются из решения системы линейных уравнений (A-λE)·χ=0 или подробно :

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = 0 \\ a_{12}\cdot x_1 + (a_{22}-\lambda)\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots. + (a_{nn}-\lambda)\cdot x_n = 0 \end{cases}$$

Теорема Гамильтона-Кэли и ее применение.

Всякая матрица A является корнем своего характеристического уравнения :

(*) $A^n + \psi_1\cdot A^{n-1} + \ldots. + \psi_{n-1}\cdot A + \psi_n\cdot E = 0$

Если матрица A невырожденная то $\psi_n \neq 0$. Умножим (*) на A^{-1} и делим на ψ_n ,получим формулу для нахождения обратной матрицы :

(**) $A^{-1} = \frac{-1}{\psi_n}\cdot\left(A^{n-1} + \psi_1\cdot A^{n-2} + \ldots. + \psi_{n-1}\cdot E\right)$

где :

$$\psi_1 = -s_1$$

$$\psi_2 = \frac{-1}{2}\cdot\left(\psi_1\cdot s_1 + s_2\right)$$

$$\psi_3 = \frac{-1}{3}\cdot\left(\psi_2\cdot s_1 + \psi_1\cdot s_2 + s_3\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_4 = \frac{-1}{n}\cdot\left(\psi_{n-1}\cdot s_1 + \psi_{n-2}\cdot s_2 + \ldots. + \psi_1\cdot s_{n-1} + s_n\right)$$

здесь s_1- след матрицы A, s_2-след матрицы A^2 ,..., s_p-след матрицы A^p. Следом матрицы называется сумма ее элементов , стоящих на главной диагонали.

Замечание : (**) не содержит A^n. Поэтому полностью A^n вычислять не нужно, достаточно знать диагональные элементы для вычисления s_n.

Пример : проверить теорему Гамильтона-Кэли для матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение : $\det\ |A - \lambda E| = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 3 = 0$

A^2-A-3E=0. проверим :

$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ значит матрица A-корень характеристического уравнения.

Пример :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, найти A^{-1}

Решение :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 & 4 \\ -7 & 6 & -10 & -7 \\ 5 & -4 & 8 & 4 \\ 3 & -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \quad A^4 = \begin{pmatrix} 12 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & 16 & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & 18 & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & 8 \end{pmatrix}$$

Следы матрицы :

$s_1=2$; $s_2=6$; $s_3=23$; $s_4=54$

$$\psi_1 = -s_1 = -2$$

$$\psi_2 = \frac{-1}{2}\left(\psi_1 \cdot s_1 + s_2\right) = -1$$

$$\psi_3 = \frac{-1}{3}\left(\psi_2 \cdot s_1 + \psi_1 \cdot s_2 + s_3\right) = -3$$

$$\psi_4 = \frac{-1}{4}\left(\psi_3 \cdot s_1 + \psi_2 \cdot s_2 + \psi_1 \cdot s_3 + s_4\right) = 1$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{\psi_4} \cdot \left(A^3 + \psi_1 \cdot A^2 + \psi_2 \cdot A + \psi_3 \cdot E\right) = -A^3 + 2A^2 + A + 3E = \ldots$$

$$\ldots = -\begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 & 4 \\ -7 & 6 & -10 & -7 \\ 5 & -4 & 8 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Опр.: Число λ называется собственным числом квадратной матрицы A , если существует ненулевой столбец χ такой, что
(5) $A\cdot\chi=\lambda\cdot\chi$ $(A-\lambda E)\cdot\chi=0$; $\chi\neq 0$

χ соответствующий вектору $\vec{x}$, называется собственным вектором матрицы A.
(5) имеет нетривиальные решения , если $\det(A-\lambda E)=0$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

- характеристическое уравнение
λ- корень характеристического уравнения

Пример : Найти собственные числа и собственные векторы матрицы .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 0$ - собственные числа

Найдем собственные векторы , соответствующие собственному числу λ_1=1 при λ=1 система (5) принимает вид :

$$(A - E) \cdot \chi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

фундаментальная система решений :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

общее решение :

$$x \cdot E_1 + y \cdot E_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Значит собственные векторы, соответствующие собственному числу λ_1=1 имеют вид : $\vec{x} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, где x и y – произвольные числа не равные одновременно нулю.

Аналогично для λ_2=0, тогда $\vec{x} = z \cdot \vec{k}$, где z- произвольное число $\neq 0$.

2.Найти характеристические числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda - 11\lambda + 6 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$$

$$= (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 3$ собственные числа - корни характеристического уравнения.

$$(A - \lambda_1 \cdot E)\chi = 0 \qquad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ищем собственный вектор при $\lambda_1=1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \overset{3стр-1стр}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{2стр\cdot 2-1стр\cdot 3}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{3стр-2стр}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{1стр-2стр\cdot 3}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{1стр / 4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{array} \quad \text{для любых } x_3 = c$$

$$\vec{x} = \left(c \cdot \vec{i} + 2c \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}\right) = c\left(\vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}\right)$$

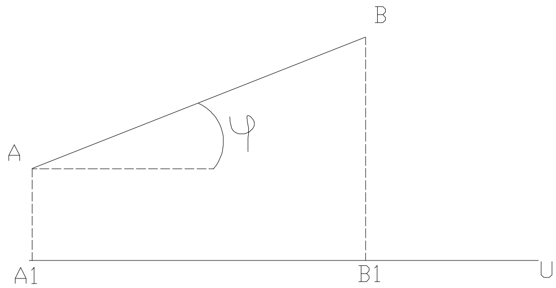
собственные векторы направлены вдоль вектора $\vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}$

6. Векторная алгебра

1.Опр.: *геометрическим вектором* $\vec{a}$ называется множество всех направленных отрезков , имеющих одинаковую длину и направление. Длина вектора $\vec{a}$ - *модуль* $\left|\vec{a}\right|$ или $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектора, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых называются коллинеарными.

Равенство векторов : $\vec{a} = \vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$, лежат на параллельных прямых или на одной и направлены в одну сторону.



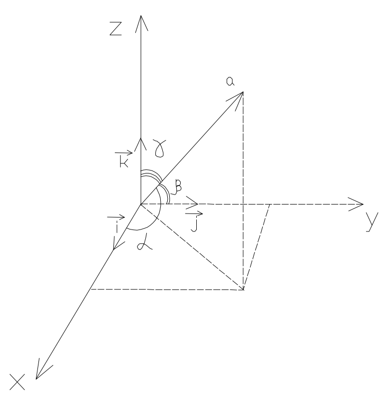
проекция вектора на ось U.

Пр$_{\bar{u}}$ $\overrightarrow{AB} = A_1 \cdot B_1 = |AB| \cos\phi$, $0 \le \phi \le \pi$.

Проекции на координатные оси : $\vec{a} = (x, y, z)$,

$A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2 z_2)$ $\overrightarrow{AB} = (x, y, z)$ $x = x_2 - x_1$ $y = y_2 - y_1$ $z = z_2 - z_1$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Базис $B = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ называется прямоугольным, если векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. Тогда обозначают : $\vec{e}_1 = \vec{i}$ $\vec{e}_2 = \vec{j}$ $\vec{e}_3 = \vec{k}$

Числа

$$\cos\alpha = \cos\left(\vec{a},\vec{i}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \cos\left(\vec{a},\vec{j}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos\gamma = \cos\left(\vec{a},\vec{k}\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

$\vec{a} = (x, y, z)$ => $\vec{a} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ вектор представлен своими координатами в некотором прямоугольном базисе.

Единичный вектор ,имеющий одинаковое направление с вектором $\vec{a}$ называется *ортом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^{\,0}$ $\quad \vec{a}^{\,0} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$.

Если $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ две произвольные точки в просранстве , то координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ равны

$x = x_2 - x_1$

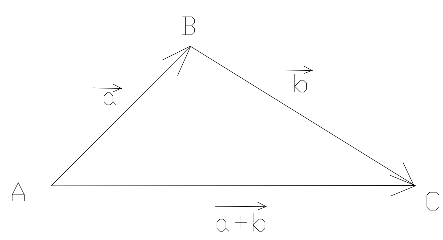
$y = y_2 - y_1$, тогда расстояние между точками M_1 и M_2 :

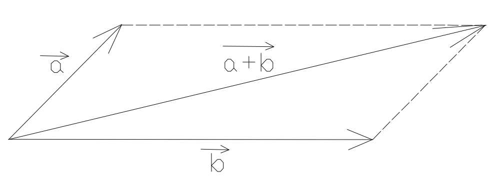
$z = z_2 - z_1$

$$\rho\left(M_1, M_2\right) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2 + \left(y_2-y_1\right)^2 + \left(z_2-z_1\right)^2}$$

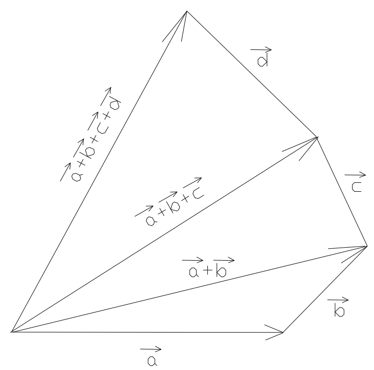
2.Линейные операции над векторами :

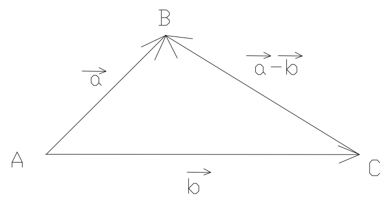
- сложение векторов и умножение их на число.

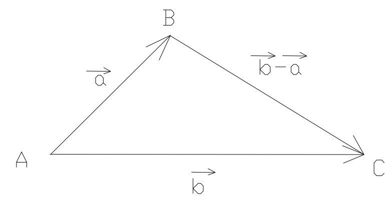




$\vec{a} + \vec{b}$ - правила треугольника, параллелограмма. Сложение многих векторов по правилу треугольника.







Разность векторов – вектор, которые в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$. Два вектора, лежащие на одной прямой равной длины, но противоположно направленные относительно друг друга(↑↓) называются *взаимнообратными*.

Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\cdot\vec{a}$, такой что :

1) $\left|\lambda\cdot\vec{a}\right| = |\lambda|\cdot\left|\vec{a}\right|$
2) $\vec{a}$ и $\lambda\cdot\vec{a}$ сонаправлены при λ>0 и противоположно направлены при λ<0 .

Теоремы о проекциях :

1. Проекция суммы векторов на ось $\vec{U}$ равна сумме их проекций на эту ось.

$$\text{Пр}_{\bar{U}}\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ ..+\vec{a}_n\right)=\text{Пр}_{\bar{U}}\vec{a}_1+.....+\text{Пр}_{\bar{U}}\vec{a}_n$$

2. $\text{Пр}_{\bar{U}}\ \alpha\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\text{Пр}_{\bar{U}}\vec{a}$

3.Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$
$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1)$$

Признак коллинеарности векторов .

Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ коллинеарны в том случае, если их координаты пропорциональны :

$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \rightarrow$

$$x_2 = \lambda \cdot x_1 \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$
$$y_2 = \lambda \cdot y_1$$
$$z_2 = \lambda \cdot z_1$$

Опр.: Базис и координаты вектора.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называется *базисом* во множестве всех геометрических векторов.

Любой геометрический вектор $\vec{a}$ может быть *единственным* образом представлен в виде : $\vec{a} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3$ - разложение вектора $\vec{a}$ по базису В. Числа x_1, x_2, x_3 -координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Аналогично : упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ называется базисом В во множестве геометрических векторов , компланарных некоторой плоскости.

Любой ненулевой вектор $\vec{e}$ образует базис $B = (\vec{e})$ во множестве всех геометрических векторов, коллинеарных некоторому направлению.

3.Скалярное произведение векторов.

Опр.: Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ называется число : $\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = \left|\vec{a}_1\right| \cdot \left|\vec{a}_2\right| \cdot \cos\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right)$ также обозначается $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$.

Геометрические свойства скалярного произведения :

1. $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ - условие перпендикулярности векторов.

2. если $\phi = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right)$, то $0 \le \phi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 > 0$

$\frac{\pi}{2} < \phi \le \pi \Leftrightarrow \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 < 0$

Алгебраические свойства скалярного произведения :

1. $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1$
2. $\left(\lambda \cdot \vec{a}_1\right) \cdot \vec{a}_2 = \lambda\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\right)$
3. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right) = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot \vec{b}_2$

Если заданы кординаты векторов в прямоугольном базисе $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$, то скалярное произведение равно :

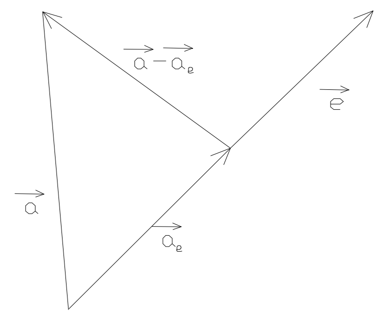
$\vec{a}_1 \cdot a_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

$$\cos\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = \frac{\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\right)}{\left|\vec{a}_1\right| \cdot \left|\vec{a}_2\right|} = \frac{\left(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2\right)}{\sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2} \cdot \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2}}$$

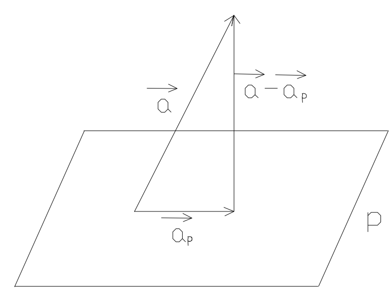
- угол между векторами .

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ - Н.и Д. условие перпендикулярности векторов $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$.

Опр. : Если задан некорый вектор $\vec{e}$, то *ортогональной составляющей* произвольного вектора $\vec{a}$ *вдоль вектора* $\vec{e}$ называется такой вектор $\vec{a}_{\vec{e}}$, который коллинеарен $\vec{e}$, причем разность $\vec{a}-\vec{a}_{\vec{e}}$ перпендикулярна вектору $\vec{e}$.



Ортогональной составляющей вектора $\vec{a}$ в плоскости P называется вектор $\vec{a}_p$, компланарный плоскости P , причем разность $\vec{a}-\vec{a}_p$ перпендикулярна этой плоскости.



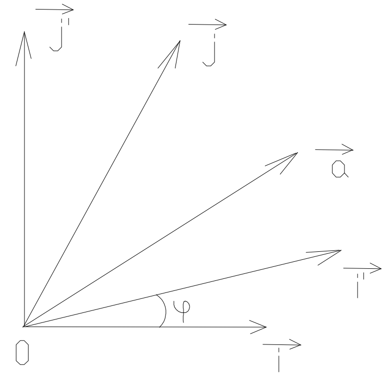
если базис $B\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ прямоугольный, то координаты произвольного вектора $\vec{a}=x_1\cdot\vec{e}_1+x_2\cdot\vec{e}_2+x_3\cdot\vec{e}_3$ в этом базисе могут быть получены :

(1) $x_i=(\vec{a}\cdot\vec{e})$, $i=1,2,3$

Формула (1) позволяет найти связь между координатами одного и того же вектора в различных прямоугольных базисах.

Пример :

Пусть базис B'=$\left(\vec{i}^1, \vec{j}^1\right)$ получен из базиса $B = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ поворотом вокруг точки O на угол φ. Установить связь между координатами век-



тора $\vec{a}$ в базисах B и B'.

Решение : пусть $\vec{a} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$ тогда

$$x^1 = \vec{a}\cdot\vec{i}^1 = x\cdot\vec{i}\cdot\vec{i}^1 + y\cdot\vec{j}\cdot\vec{i}^1$$
$$y^1 = a\cdot\vec{j}^1 = x\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}^1 + y\cdot\vec{j}\cdot\vec{j}^1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}^1 = \cos\phi \qquad \vec{i}\cdot\vec{j}^1 = \cos(\phi + \frac{-\pi}{2}) = +\sin\phi$$

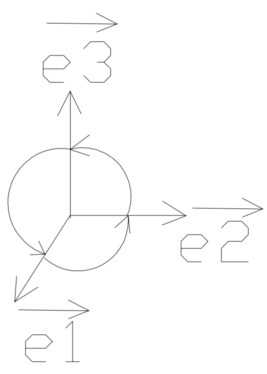
$$\vec{i}\cdot\vec{j}^1 = \cos(\phi + \frac{\pi}{2}) = -\sin\phi \qquad \vec{i}\cdot\vec{j}^1 = \cos\phi$$

Ответ :

$$x' = x\cdot\cos\phi + y\cdot\sin\phi$$
$$y' = -x\cdot\sin\phi + y\cdot\cos\phi$$

4.Векторное произведение векторов.

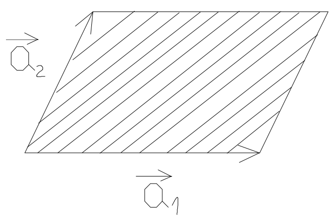
Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой* (обход от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ и от $\vec{e}_2$ к $\vec{e}_3$ против часовой стрелки)



если нет, то называют *левой*.

Опр.: Векторным произведением вектора $\vec{a}_1$ на $\vec{a}_2$ называется вектор, обозначающийся $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ или $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, определяемый тремя условиями :

1. $\left|\left[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right]\right| = \left|\vec{a}_1\right| \cdot \left|\vec{a}_2\right| \cdot \sin\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = S$



длина вектора $\left[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right]$ равна площади параллелограмма , построенного на векторах $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. $\left[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right] = S \cdot \vec{e}$, где $\vec{e}$ - орт. векторного произведения.

2. Вектор $\left[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right]$ перпендикулярна плоскости векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.
3. упорядоченная тройка $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, $\left[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right]$ правая(направление вектора $\left[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right]$ находится в соответствии с правилами «правой руки» -правило «буравчика»)

Свойства :

1. $\left[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right] = -\left[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right]$
2. $\left[\lambda \cdot \vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right] = \lambda \cdot \left[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right]$
3. $\left[\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right) \times \vec{b}\right] = \left[\vec{a}_1 \times \vec{b}\right] + \left[\vec{a}_2 \times \vec{b}\right]$

* $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \iff \left[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right] = 0$

Если $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ векторы, заданные своими координатами в правом прямоугольном базисе, то разложение $\left[\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right]$ в том же базисе имеет вид :

** $\left[\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right]=(y_1\cdot z_2-z_1\cdot y_2)\cdot\vec{i}+(z_1\cdot x_2-x_1\cdot z_2)\vec{j}+(x_1\cdot y_2-y_1\cdot x_2)\vec{k}$

или

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Двойное векторное произведение

$$\left[\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\times\vec{c}\right]\neq\left[\vec{a}_1\times\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right]$$

$$\left[\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\times\vec{c}\right]=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})-\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$\left[\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})-\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

5.Смешанное произведение векторов.

Опр.: Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ называется число $(\left[\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right]\cdot\vec{a}_3)$

Геометрические свойства :

1. если V-объем параллелепипеда построенного на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, то $(\left[\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right]\cdot\vec{a}_3)$ =

а. V , если тройка $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ правая ;

б. – V, если тройка $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ левая.

2. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ компланарны (лежат в одной плоскости), если $(\left[\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right]\cdot\vec{a}_3)=0$

Н.и Д. условие компланарности трех векторов.

Основное алгебраическое свойство –циклическая перестановка векторов не меняет величины смешанного произведения.

$$\left[\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right]\cdot\vec{a}_3=\left[\vec{a}_2\times\vec{a}_3\right]\cdot\vec{a}_1=\left[\vec{a}_3\times\vec{a}_1\right]\cdot\vec{a}_2$$

$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]$ поэтому смешанное произведение записывается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ (результат не зависит от того как расставить квадратные скобки).

$\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$ смешанное произведение , $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3=0$,если векторы компланарны.

1. Пусть на прямой l (·)M_l (·)M_2 и (·)M причем $M1\neq M2$.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$, т.к они коллинеарны, то ....

λ действительное число, что $M_1\vec{M}=\lambda\cdot\overrightarrow{MM_2}$. Число λ называется отношением , в котором (·)M делит направленый отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$, причем λ>0, если (·)M внутри отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$, отрицательно λ<0 (λ≠-l) если (·)M вне $\overrightarrow{M_1M_2}$ и λ=0, если (·)M=(·)M_l.

Пример :Зная координаты (·)M_l (x_l,y_l,z_l) и (·)M_2(x_2,y_2,z_2) и отношение λ , в котором (·)M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$, найти координаты (·)M.

Решение : пусть (·) O –начало координат.Обозначим $\overrightarrow{OM_1}=\vec{r}_1,\overrightarrow{OM_2}=\vec{r}_2,\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, т.к. $M_1\vec{M}=\vec{r}-\vec{r}_1$, $\overrightarrow{MM_2}=\vec{r}_2-\vec{r}$, то

$\vec{r}-\vec{r}_1=\lambda\cdot\left(\vec{r}_2-\vec{r}\right)$ и т.к. λ≠-l => (1) $\vec{r}=\dfrac{\left(\vec{r}_1+\lambda\cdot\vec{r}_2\right)}{1+\lambda}$

(1) – решение задачи в векторной форме. Переходим к координатам :

$$x = \frac{\left(x_1 + \lambda \cdot x_2\right)}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{\left(y_1 + \lambda \cdot y_2\right)}{1 + \lambda} \qquad z = \frac{\left(z_1 + \lambda \cdot z_2\right)}{1 + \lambda}$$

2. Если (·)M-произвольная точка пространства R^3, то направленный вектор $\overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки M. Координатами (·)M называеются координаты ее радиус – вектора $\overrightarrow{OM}$ как геометрического вектора в базисе B, т.е.

$$x(M) = X\left(\overrightarrow{OM}\right) \qquad y(M) = Y\left(\overrightarrow{OM}\right) \qquad z(M) = Z\left(\overrightarrow{OM}\right)$$

(·)$M_1(x_1,y_1,z_1)$ и (·)$M_2(x_2,y_2,z_2)$

(2) $\overrightarrow{M_1M_2}$: $X=x_2-x_1$ $\quad Y=y_2-y_1$ $\quad Z=z_2-z_1$

Пример : В треугольнике ΔABC (·)A (1,0,-1) , (·)B (2,2,1) заданы величины и точка E (-1,2,1) пересечение медиан ΔABC.Найти координаты вершины C.

Решение : т.к. координаты (·)A заданы, то для вычисления координат (·)C найдем координаты вектора $\overrightarrow{AC}$. Пусть $\overrightarrow{BF}$ -медиана, проведенная из (·)B. Тогда:

$$\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AF} = 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}\right) = 2 \cdot \left[\overrightarrow{AB} + \frac{3\left(\overrightarrow{BE}\right)}{2}\right] \tag{3}$$

(Здесь учтено, что точка E делит медиану BF в отношении 2:1).

(2)→вычисляем координаты векторов $\overrightarrow{AB}(1,2,2)$ и $\overrightarrow{BE}(-3,0,0)$

(3) → $\overrightarrow{AC}\ (-7,4,4)$

(2) → координаты точки C :

$$x(C) = x(A) + X\left(\overrightarrow{AC}\right) = -6$$

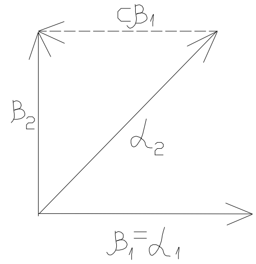
$$y(C) = y(A) + Y\left(\overrightarrow{AC}\right) = 4$$

$$z(C) = z(A) + Z\left(\overrightarrow{AC}\right) = 3 \qquad \longrightarrow \ C(-6,4,3)$$

Ортогонализация Грема-Шмидта.

Рассмотрим схему, позволяющую n-м вектора в R^n , n векторов $B=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ спроецировать на ортогональный базис $B_1=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$.

Затем отнормировав вектора B_1, получим ортонормированный базис из единичных векторов $B_0=(e_1,...,e_n)$.
Ортогональный базис $B_1=(\beta_1,...,\beta_n)$ конструируется шаг за шагом. За вектор β_1 принимается один из базисных векторов α_1 : $\beta_1= \alpha_1$.



Вектор β_2 строится $\perp$ к β_1 и α_1 и его длина составляет проекции α_2 на направление β_2 .Векторы α_1,α_2 ЄР образуют плоскость. $\boldsymbol{\beta_2=\alpha_2+c\beta_1}$ **,**c=const находится из условия $\boldsymbol{\beta_2\perp\beta_1}$**:**

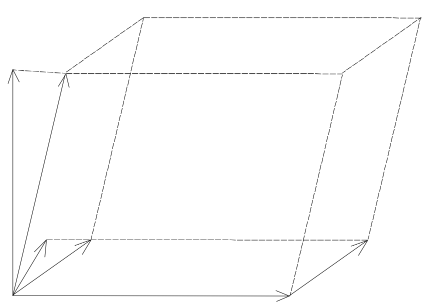
$$0=(\beta_2\cdot\beta_1)=((\alpha_2+c\cdot\beta_1)\cdot\beta_1)=(\alpha_2\cdot\beta_1)+c\cdot(\beta_1\cdot\beta_1)$$

$c=\dfrac{-(\alpha_2\cdot\beta_1)}{(\beta_1\cdot\beta_1)}$, $\alpha_i\cdot\beta_i$ – скалярное произведение векторов

Следующий вектор базиса B_1 - β_3 конструируется с помощью уже найденых векторов β_1 и β_2 за вектор β_3 выбирается вектор : $\beta_3=\alpha_3+c_1\cdot\beta_1+c_2\cdot\beta_2$
C_1,C_2-const выбираются из условий $\boldsymbol{\beta_3\perp\beta_1;\beta_3\perp\beta_2}$

$$0=(\beta_3\cdot\beta_1)=((\alpha_3+c_1\cdot\beta_1+c_2\cdot\beta_2)\cdot\beta_1)=(\alpha_3\cdot\beta_1)+c_1\cdot(\beta_1\cdot\beta_1)$$

$$c=\frac{-(\alpha_3\cdot\beta_1)}{(\beta_1\cdot\beta_1)}$$

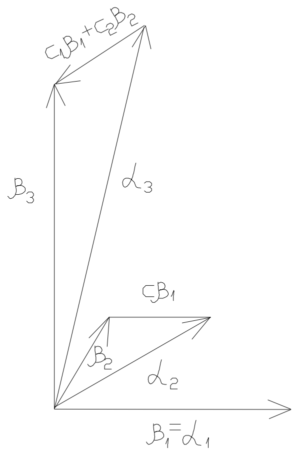


$$0=(\beta_3\cdot\beta_2)=((\alpha_3+c_1\cdot\beta_1+c_2\cdot\beta_2)\cdot\beta_2)=(\alpha_3\cdot\beta_2)+c_2\cdot(\beta_2\cdot\beta_2)$$

$$c=\frac{-(\alpha_3\cdot\beta_2)}{(\beta_2\cdot\beta_2)}$$

Вектора β_1, β_2, β_3 является линейной комбинацией векторов α_1, α_2, α_3 . В случае n=3 (3-ех мерное пространство, R^3). Вектор β_3

перпендикулярен (т.е.нормален)плоскости векторов α_1 и α_2 (β_1и β_2).



Аналогично конструируется вектор β_k , но уже найденым вектором $\beta_1,...,\beta_{k-1}$:

$\beta_k=\alpha_k+c_1\beta_1+...+c_{k-1}\beta_{k-1}$,где const находим из условий : $\beta_k\perp\beta_1$; $\beta_k\perp\beta_2$;...; $\beta_k\perp\beta_{k-1}$.

$$c=\frac{-(\alpha_k\cdot\beta_i)}{(\beta_i\cdot\beta_i)}, i=1,2,....,k-1$$

процесс продолжается до полного постерения ортогонального базиса $B_1=(\beta_1,...,\beta_n)$. Ортонормированный базис $B_0=(e_1,...,e_n)$получается $e_i=\frac{1}{|\beta_i|}\cdot\beta_i, i=1,2,....,n$, $|\beta_i|$-длина вектора β_i .

Пример : $\alpha1=(1,4,1)$,$\alpha2=(-1,-13,-1)$,$\alpha3=(-8,9,-10)$

Решение :

$\beta_1=\alpha_1=(1,4,1)$

$\beta_2=\alpha_2+c\beta_1$;

$$c=\frac{-(\alpha_2\cdot\beta_1)}{(\beta_1\cdot\beta_1)}=\frac{-(-54)}{18}=3$$

$\beta_2=(-1;-13;-1)+3(1;4;1)=(2;-1;2)$

$\beta_3=\alpha_3+c_1\beta_1+c_2\beta_2$

$$c=\frac{-(\alpha_3\cdot\beta_1)}{(\beta_1\cdot\beta_1)}=\frac{-18}{18}=-1$$

$$c=\frac{-(\alpha_3\cdot\beta_2)}{(\beta_2\cdot\beta_2)}=\frac{-(-45)}{9}=5$$

$\beta_3=(-8;9;-10)-(1;4;1)+5(2;-1;2)=(1;0;-1)$

Получим систему 3-ех ортогональных векторов(прямоугольный базис) ; $\beta_1=(1;4;1)$;$\beta_2=(2;-1;2)$;$\beta_3=(1;0;-1)$

Длины векторов :

$$\left|\beta_1\right| = \sqrt{1^2 + 16 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\left|\beta_2\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

$$\left|\beta_3\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$e_1 = \frac{1}{\left|\beta_1\right|} \quad \beta_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \quad (1,4,1) = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$e_2 = \frac{1}{\left|\beta_2\right|} \quad \beta_2 = \frac{1}{3} \quad (2,-1,2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$e_3 = \frac{1}{\left|\beta_3\right|} \quad \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

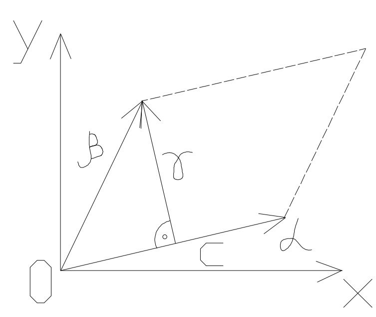
- система 3-х ортонормированных векторов (прямоугольный базис единичных векторов)

Геометрическая интерпретация детерминанта второго порядка .

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Геометрические векторы α=(a1;a2) β=(b1;b2) заданы своими координатами в плоскости Oxy. Достроим вектора до параллелограмма и покажем, что абсолютное значение $\left|\det A\right| = \left|A\right| = S$ будет равнр площади параллелограмма.

Если α=(0;0)-нулевой вектор, то |A|=0=S и утверждение доказано.



Следовательно, пусть α≠(0;0) , проведем в параллелограмме высоту $\gamma = \overrightarrow{CO} + \beta$. Т.к. вектор $\vec{\alpha}$ и $\overrightarrow{CC}$ коллинеарны, то найдется такая const a , что $\overrightarrow{CO} = a \cdot \alpha$, тогда $\gamma = \beta + a \cdot \alpha$

$$|A|^2 = A\cdot A^T = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\cdot\alpha & \alpha\cdot\beta \\ \beta\cdot\alpha & \beta\cdot\beta \end{vmatrix} + a\cdot I = \begin{vmatrix} \alpha\cdot\alpha & \alpha\cdot\beta \\ \alpha\cdot(\beta + a\cdot\alpha) & \beta\cdot(\beta + a\cdot\alpha) \end{vmatrix} =$$

$\alpha\cdot\beta$- скаляр-ное произведение векторов

$$= \begin{vmatrix} \alpha\cdot\alpha & \alpha\cdot\beta \\ \alpha\cdot\gamma & \beta\cdot\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\cdot\alpha & \alpha\cdot\beta \\ 0 & \beta\cdot\gamma \end{vmatrix} =$$ учтем, что $\alpha\cdot\gamma=\gamma\cdot\alpha=0$ как перпендикулярные вектора

$$= (\alpha\cdot\alpha)\cdot(\gamma\cdot\beta) = (|\alpha|)^2(\gamma\cdot\beta + 0) = (|\alpha|)^2(\gamma\cdot\beta + \gamma\cdot a\cdot\alpha) =$$

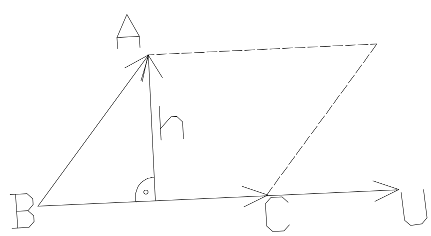
$$= (|\alpha|)^2(\gamma(\beta + a\cdot\alpha)) = (|\alpha|)^2(\gamma\cdot\gamma) = (|\alpha|)^2\cdot(|\gamma|)^2$$ => $|A| = |\alpha|\cdot|\gamma|$ - это площадь, что и требовалось доказать.

$\gamma = \beta + a\cdot\alpha$

Теорема : Абсолютное значение детерминанта второго порядка равно площади параллелограмма построенного на его векторах.

Пример : Найти расстояние от точки A(2;-4) до прямой , проведенной через точки B(1;3) и C(-2;-1).

Решение :



$\vec{BC} = (-3,-4)$ $\vec{BA} = (1,-7)$

$$\left|\vec{BC}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

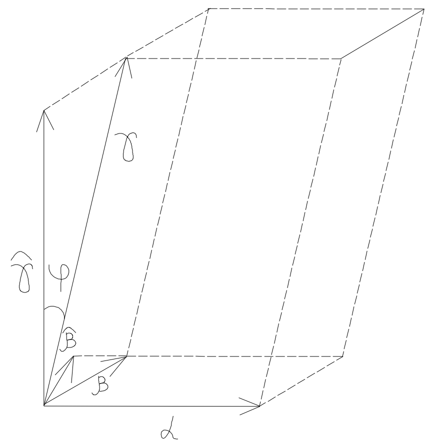
$$\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 21 + 4 = 25 = S$$

$$\rho(A,U) = h = \frac{S}{\left|\vec{BC}\right|} = \frac{25}{5} = 5$$

Геометрическая интерпретация детерминанта третьего порядка .

Теорема : Абсолютное значение детерминанта третьего порядка равно объему (V) параллелепипеда , построенного на его векторах.

Док-во :



$$A=\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \alpha=(a1,a2,a3) \\ \beta=(b1,b2,b3) \\ \gamma=(c1,c2,c3) \end{array}\right\}$ R3-проведем эти вектора из начала координат и достроим до параллелепипеда.Пусть $\hat{\beta}\perp\alpha$, $\hat{\beta}$-высота параллелограмма, в плоскости основания, т.е. $\hat{\beta}$-проекция β:

$\hat{\beta}=\beta+a\cdot\alpha$

$\hat{\gamma}=\gamma+b\cdot\alpha+c\cdot\beta$ a,b,c-const

$\hat{\gamma}$-высота, опущенная на плоскость параллельную плоскости основания и проходящая через конец вектора γ.

$$A^2=A\cdot A^T=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha\cdot\alpha & \alpha\cdot\beta & \alpha\cdot\gamma \\ \beta\cdot\alpha & \beta\cdot\beta & \beta\cdot\gamma \\ \gamma\cdot\alpha & \gamma\cdot\beta & \gamma\cdot\gamma \end{vmatrix}\begin{array}{l} \bullet +a\cdot I \\ \bullet +b\cdot I+c\cdot II \end{array}$$

$$A^2==\begin{vmatrix} \alpha\cdot\alpha & \alpha\cdot\beta & \alpha\cdot\gamma \\ \beta_t\cdot\alpha & \beta_t\cdot\beta & \beta_t\cdot\gamma \\ \gamma_t\cdot\alpha & \gamma_t\cdot\beta & \gamma_t\cdot\gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha\cdot\alpha & \alpha\cdot\beta & \alpha\cdot\gamma \\ 0 & \beta_t\cdot\beta & \beta_t\cdot\lambda \\ 0 & 0 & \gamma_t\cdot\gamma \end{vmatrix}=(\alpha\cdot\alpha)(\beta_t\cdot\beta)(\gamma_t\cdot\gamma)=$$

$$=(\alpha\cdot\alpha)[\beta_t\cdot\beta+\beta_t(a\cdot\alpha)][\gamma_t\cdot\gamma+\gamma_t(\beta\cdot\alpha)+\gamma_t(c\cdot\beta)]=(\alpha\cdot\alpha)(\beta_t\cdot\beta_t)(\gamma_t\cdot\gamma_t)=$$

$$=(|\alpha|)^2\cdot(|\beta_t|)^2\cdot(|\gamma_t|)^2$$

$|A| = |\alpha|\cdot|\beta_t|\cdot|\gamma_t|$ - абсолютное значение, теорема доказана.

$\beta t=\hat{\beta}$ $\gamma_t=\hat{\gamma}$

<u>Теорема</u>: Смешанное произведение трех векторов -

- определитель третьего порядка , строками которого являются компоненты векторов.

<u>Док-во</u> :

α=(a1;a2;a3) ,β=(b1;b2;b3)

векторное произведение[αxβ] по определению

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right] = i \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

=(γ·[αxβ])=([αxβ]·γ) – скалярное произведение двух векторов или смешанное произведение трех векторов.

$\alpha=(a_1;a_2;a_3)$; $\beta=(b_1;b_2;b_3)$; $\gamma=(c_1;c_2;c_3)$

Замечание :

([αxβ]·α)=0, т.к. [αxβ]⊥α

([αxβ])=0,т.к. [αxβ]⊥β

V=|A|=|[αxβ]·γ|=|[αxβ]|·|γ||cosφ|

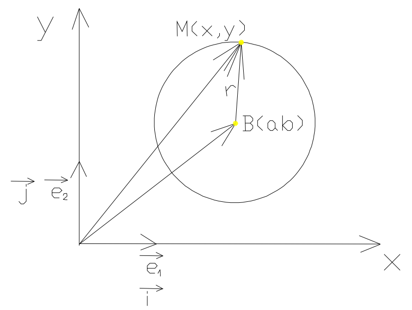
высота параллелепипеда h=|γ||cosφ|=> на рис. вектор $\hat{\gamma}$ ||[αxβ]

V=|[αxβ]|·h отсюда следует, что S=|[αxβ]|- площадь параллелограмма в основании.

7. <u>Понятие уравнения линии (кривой) .Кривая второго порядка на плоскости : окружность, эллипс, гипербола, парабола.</u>

Опр.: Равенство F(x,y)=0 называется уравнением линии L в заданной системе координат на плоскости, если оно выполнено для любой точки принадлежащей линии L и не выполнено для координат точек не принадлежащих L(геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению F(x,y)=0).

1. Окружность.



Опр.: Окружность радиуса r с центром в точке B(a,b) есть геометрическое место точек, удовлетворяющих условию : (1) $\left|\overrightarrow{BM}\right| = r$.

Запишем разложение вектора $\overrightarrow{BM}$ по координатному базису :

$\overrightarrow{BM} = (x-a)\cdot\vec{i} + (y-b)\cdot\vec{j}$

его длина : $\left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

(2) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ - уравнение окружности с центром в точке B(a,b).

Способы задания кривой : 1)y=f(x)

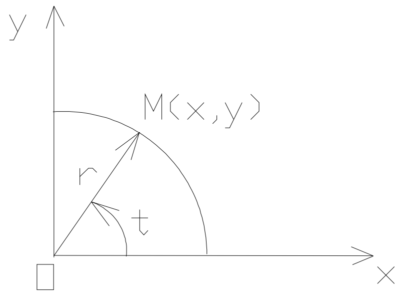
2)F(x,y)=0 3) $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

Опр.: Два уравнения называются эквивалентными или равносильными, если из первого следует второе и наоборот.

При заданной системе координат на плоскости два уравнения определяют одну и ту же линию тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

3) Рассмотрим линию, как траекторию движущейся точки, t -время и координаты $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ -параметрическое уравнение кривой на плоскости.

Пример :



Уравнения задают окружность радиусом r с центром в O(0,0)

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \\ 0\le t<2\pi \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} x=a+r\cos t \\ y=b+r\sin t \\ 0\le t<2\pi \end{cases} \iff (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

эквивалентны уравнения задают окружность радиуса r с центром B(a,b).

Опр.: Алгебраической линией на плоскости называется линия, которая в декартовой системе координат может быть задана уравнением вида :

(4) $A_1 \cdot x^{k_1} \cdot y^{l_1} + ... + A_S \cdot x^{k_S} \cdot y^{l_S} = 0$ Все показатели-неотрицательные целые числа.

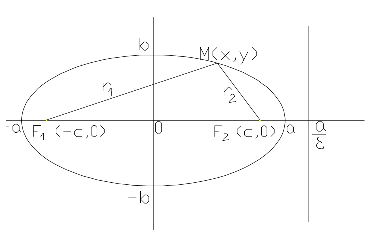
Наибольшая из сумм $(k_1+l_1)...(k_s+l_s)$ называется *степенью* уравнения или *порядком* линии.

Линии второго порядка в декартовой прямоугольной системе координат задаются в общем виде уравнением:

(5) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$, в котором коэффициенты $A,B,C\neq 0$ одновременно.

К линиям второго порядка на плоскости относятся : окружность, эллипс, гипербола, парабола.

2.Эллипс



Опр.: Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух точек плоскости (фокусов F1,F2) есть постоянная величина большая, чем расстояние между фокусами.

$F_1M=r_1$,$F_2M=r_2$ –фокальные радиусы. Эту постоянную сумму обозначают : $r_1+r_2=2a$ фокусы $F_{1a}F_2=2c$, a>c

(6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b=\sqrt{a^2-c^2}$, $a>b$ - канонические уравнение эллипса с центром в O(0,0)

a,b- большая и малая полуоси эллипса.

$x=0 \Rightarrow y=\pm b$

$y=0 \Rightarrow x=\pm a$

$x=a\cos t$ }-параметрическое уравнение эллипса.

$y=b\sin t$

$0\le t<\pi$

(7) $\varepsilon=\frac{c}{a}$ - эксцентриситет эллипса $\varepsilon<1$

(8) $r_1=a+\varepsilon x$ $r_2=a-\varepsilon x$ фокальные радиусы.

Если эллипс определен каноническим уравнением и a>b, то *прямые*

(9) $x=\frac{-a}{\varepsilon}$ $x=\frac{a}{\varepsilon}$ -директрисы эллипса.

$\left\{\frac{r}{d}=\varepsilon\right.$

Свойство директрисы : здесь r-фокальный радиус точки, d-расстояние от этой точки до директрисы, односторонней с этим фокусом (9).

Докажем (8) :

$r_1+r_2=2a$

$b^2=a^2-c^2$

$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$y^2=b^2-\frac{\left(x^2\cdot b^2\right)}{a^2}$

$r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ подставим

получим $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + a^2 - c^2 - x^2\dfrac{(a^2 - c^2)}{a^2}} = \blacksquare$

$$\blacksquare = \sqrt{x^2 + 2xc + a^2 - x^2 + \frac{(x^2 c^2)}{a^2}} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = a + \frac{c}{a}\cdot x = a + \varepsilon x$$

т.е. $r_1=a+\varepsilon x$, аналогично $r_2=a-\varepsilon x$.

Выведем (6) каноническое уравнение эллипса .

$r_1+r_2=2a$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ возводим в квадрат :

$x^2 + c^2 + y^2 + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a^2$

$\left[(x+c)^2 + y^2\right]\left[(x-c)^2 + y^2\right] = \left(2a^2 - x^2 - c^2 y^2\right)^2$

раскроем скобки

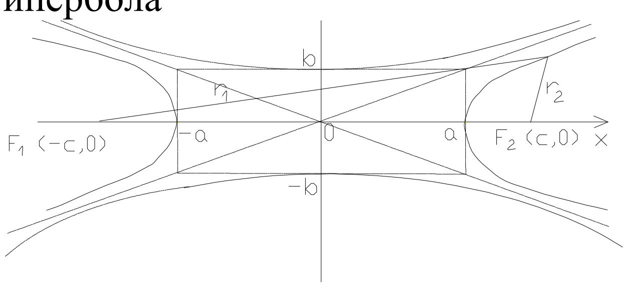
учтем,что $a^2-c^2=b^2$, получим :

$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2b^2$, делим на $a^2\cdot b^2$

$b^2=a^2-c^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3.Гипербола



Опр.: Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина 2a.

(10) $r_1-r_2=2a$

(11){F1F2=2c –расстояние между фокусами

2a<2c

a<c

(12)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

-каноническое уравнение гиперболы с центром в точке O(0,0), где $b=\sqrt{c^2-a^2}$

(13)

$$y=\frac{b}{a}\cdot x \qquad y=-\left(\frac{b}{a}\cdot x\right)$$

- уравнение асимптот

(14)

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

-уравнение сопряженной к (12) гиперболы. Фокусы на Oy.

(15)

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \qquad \varepsilon>1$$

→ эксцентриситет гиперболы.

Фокальные радиусы : $r_1;r_2$

(16) $\begin{cases} r_1=\varepsilon x+a & r_2=\varepsilon x-a \Rightarrow \textit{правая} \quad \textit{ветвь} \\ r_1=-\varepsilon x-a & r_2=-\varepsilon x+a \Rightarrow \textit{левая} \quad \textit{ветвь} \end{cases}$

Директрисы

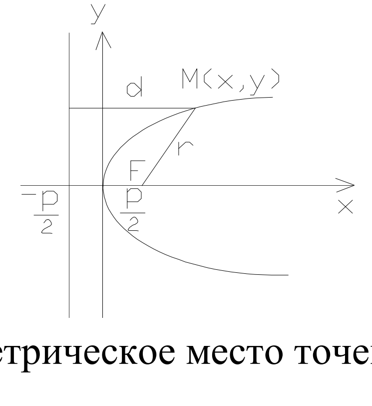
(17)

$$x=\frac{-a}{\varepsilon} \qquad x=\frac{a}{\varepsilon} \qquad \frac{r}{d}=\varepsilon$$

- свойство директрисы

r- фокальный радиус точки, d-расстояние от этой точки до директрисы односторонней с этим фокусом.

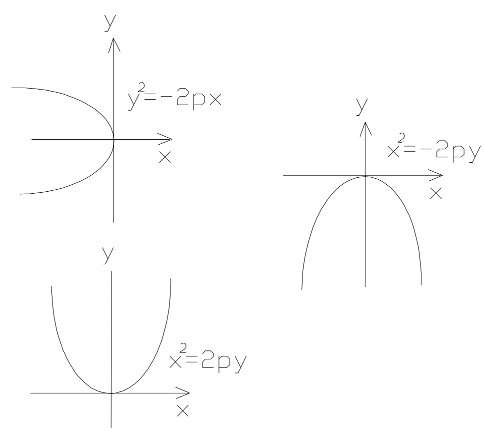
4.Парабола.



Опр.: Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до фиксируемой точки(фокуса F) равно расстоянию до прямой $x = \frac{-p}{2}$, называемой директрисой, r =d.

$y^2=2px$, директриса $x = \frac{-p}{2}$, p- фокальный параметр параболы- расстояние от фокуса до директрисы. $r = x + \frac{p}{2}$ -фокальный радиус точки. MF=r=d

$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$ – каноническое уравнение парабболы с вершиной смещенной в точку (x_0, y_0).



Уравнение касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Вывод :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -неявно определяет функцию y=y(x) $-a \le x \le a$

выразим : (*)

$y = \sqrt{b^2 - \frac{\left(b^2 x^2\right)}{a^2}} = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ - для верхней половины эллипса $y > 0$

$y = -b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ -для нижней половины эллипса $y < 0$

т.к.эллипс проходит через точку $M_0(x_0,y_0)$,то

(**)

$$y_0 = b \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(x_0\right)^2}{a^2}}$$

Угловой коэффициент наклона касательной в точки $M_0(x_0,y_0)$ к эллипсу :

$$\frac{K}{M_0} = \frac{\tan(\alpha)}{M_0} = \frac{\frac{dy}{dx}}{M_0 \cdot (x_0, y_0)} = b \cdot \frac{\left(-2 \cdot \frac{x_0}{a^2}\right)}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{(x_0)^2}{a^2}}} = -x_0 \cdot \frac{b^2}{a^2 \cdot b \cdot \sqrt{1 - \frac{(x_0)^2}{a^2}}} = \frac{\left(-x_0 \cdot b^2\right)}{a^2 \cdot y_0} = \frac{-b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

$$y_0 = b \cdot \sqrt{1 - \frac{(x_0)^2}{a^2}}$$

$$k = \frac{-b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$$

$$-\frac{(x_0)^2}{a^2} + \frac{(y_0)^2}{b^2} = 1$$

:

1. $y - y_0 = \frac{-b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$
2. $a^2 y_0 y - a^2 (y_0)^2 + b^2 x_0 x - b^2 (x_0)^2 = 0$
3. $(x_0)^2 b^2 + a^2 (y_0)^2 = a^2 b^2$

т. M_0 лежит на эллипсе.

Уравнения касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0,y_0)$.

$$a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 b^2$$

(18)

$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

-уравнение касательной к эллипсу в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Если $y_0=0$, то касательные к эллипсу имеют вид : $x=\pm a$

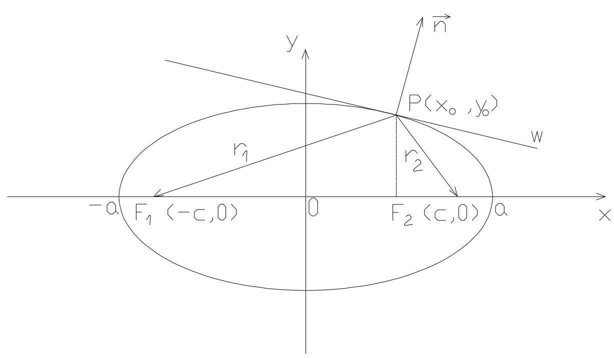
Аналогично выводится уравнение касательной к гиперболе в точке $M_0(x_0,y_0)$.

(19)

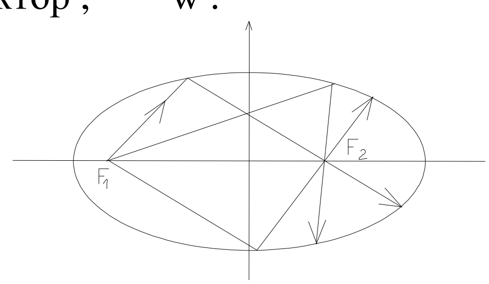
$$\frac{x_0 \cdot x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Оптическое свойство эллипса.

Теорема : Пусть $P(x_0,y_0)$ принадлежит Э : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, а w : $\frac{x_0 \cdot x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ -касательная к эллипсу в точке P. Фокальные радиусы r_1и r_2 образуют одинаковые углы с касательной w.



Док-во: Если уравнение прямой Ax+By+C=0, то (A,B) координаты $\vec{n}$, $\vec{n}$-нормальный вектор , $\vec{n} \perp w$.



$\vec{n} = \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$ для нормального вектора касательной w .

Докажем, что $\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{PF_1}\right) = \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{PF_2}\right)$

$$\frac{\left(\vec{n}, \overrightarrow{PF_1}\right)}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PF_1}\right|} = \frac{\left(\vec{n}, \overrightarrow{PF_2}\right)}{\left|\vec{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PF_2}\right|} ; \quad \left|\overrightarrow{PF_1}\right| = r_1 \quad \left|\overrightarrow{PF_2}\right| = r_2$$

(*)

$$\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF_1}}{r_1}=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{r_2}$$

$\overrightarrow{PF_1}=\{-c-x_0,-y_0\}$; $\overrightarrow{PF_2}=\{c-x_0,-y_0\}$, эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF_1}=\frac{x_0}{a^2}\cdot(-c-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(-y_0)=\blacksquare$$

$$\blacksquare=\frac{(-c\cdot x_0)}{a^2}-\left[\frac{(x_0)^2}{a^2}+\frac{(y_0)^2}{b^2}\right]=\left(-c\cdot\frac{x_0}{a^2}\right)-1=\blacksquare$$

$$\frac{-\varepsilon x_0}{a}-1=\frac{-(\varepsilon x_0+a)}{a}=\frac{-r_1}{a}$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\frac{x_0}{a^2}\cdot(c-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(-y_0)=\blacksquare$$

$$\blacksquare=\frac{(c\cdot x_0)}{a^2}-\left[\frac{(x_0)^2}{a^2}+\frac{(y_0)^2}{b^2}\right]=\left(c\cdot\frac{x_0}{a^2}\right)-1=\blacksquare$$

$$\frac{\varepsilon x_0}{a}-1=\frac{-(a\cdot-\varepsilon x_0)}{a}=\frac{-r_2}{a}$$ подставим в (*)

$$\frac{-r_1}{a\cdot r_1}=\frac{-1}{a}=\frac{-r_2}{a\cdot r_2}$$ следовательно утверждение теоремы верно .

1^a Асимптоты гиперболы : $y=\frac{-b}{a}\cdot x$ $\quad y=\frac{b}{a}\cdot x$

$y=kx+b$;

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)$$

, где $y=f(x)$ - уравнение кривой , $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)$$

$$y=\pm b\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}$$

$$k = \lim_{x\to\infty^+} \frac{\left(b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty^+} b \cdot \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2 \cdot x^2} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{b}{a}$$

-верхняя половина правой ветви

$$k = \lim_{x\to\infty^+} \frac{-\left(b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right)}{x} = \frac{-b}{a}$$

-нижняя половина правой ветви

$$b = \lim_{x\to\infty^+} \left[b \cdot \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} - \frac{b}{a} \cdot x\right] = \lim_{x\to\infty^+} b \cdot \frac{\left[\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)\right]}{a\left(\sqrt{x^2 a^2} + x\right)} = \blacksquare$$

$$\blacksquare = \lim_{x\to\infty^+} \frac{b}{a} \cdot \frac{\left(x^2 a^2 - x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0 = \frac{const}{\infty}$$

следует :

$$y = \frac{-b}{a} \cdot x \qquad y = \frac{b}{a} \cdot x$$

Уравнения второго порядка :

a,b,p>0

=> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - эллипс , если a= b, то окружность ;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, нет решений Ø;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, точка (0,0)

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, гипербола, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ -сопряженная гипербола;

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, две пересекающиеся прямые $\frac{y}{b}=\pm\frac{x}{a}$ => $y=\pm\frac{b}{a}\cdot x$;

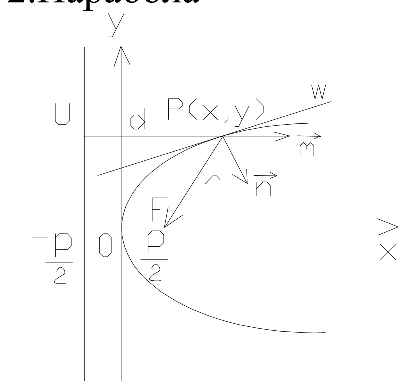
$y^2=2px$, парабола;

$y^2-a^2=0$, две параллельные прямые y=±a

$y^2+a^2=0$, нет решений Ø;

$y^2=0$, прямая.

2.Парабола



r/d=ε=1 ! для параболы

r/d=ε<1 для эллипса

r/d=ε>1 для гиперболы

Вывод уравнения параболы : пусть P(x,y) принадлежит П, тогда

$d=x+\frac{p}{2}$ $\quad \overrightarrow{PF}=\left(\frac{p}{2},-x,-y\right)$

$r=\left|\overrightarrow{PF}\right|=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2}$ $\quad r=d$ по определению, тогда

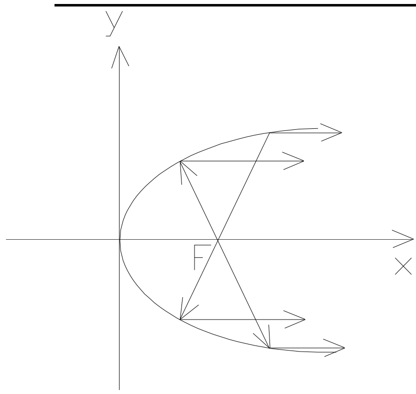
$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2}$, $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+y^2$,

$x^2+xp+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-px+x^2+y^2$ => $y^2=2px$ (*) каноническое уравнение параболы.

<u>Теорема</u>: уравнение касательной к параболе в точке $P(x_0,y_0)$ принадлежащей П $y\cdot y_0=p\left(x+x_0\right)$.

Док-во: дифференцируем (*) по x: $2y \cdot y' = 2p \Rightarrow y' = p/y$
Угловаой коэффициент касательной w , проведенной в точке $P(x_0,y_0)$: $k=p/y_0$. Запишем уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящим через точку P, т.е.уравнение касательной :
w: $(y-y_0)=k(x-x_0)$; $y-y_0=p/y_0(x-x_0) \Rightarrow y \cdot y_0-y_0^2=px-px_0$ т.к. точка P принадлежит П , то $y_0^2= 2px_0 \Rightarrow yy_0-2px_0=px-px_0$
$yy_0=px+px_0$
$yy_0=p(x+x_0)$, теорема доказана.

2^a Оптические свойства параболы.



Теорема: Фокальный радиус произвольной точки $P(x_0,y_0)$ принадлежащей П : $y^2= 2px$ образует с касательной , проведенной к П в точке $P(x_0,y_0)$ w: $yy_0=p(x+x_0)$ угол этой же величины , что и угол между касательной w и прямой || оси Ox и проходящей через точку $P(x_0,y_0)$.(см. рис. парабола).

Док-во : $Ax+By+C=0$; $\vec{n} = (A, B)$
w : $px + px_0 - yy_0 = 0$, $\vec{n} = (p, -y_0)$ -нормаль к касательной
точка P принадлежит П $\Rightarrow y_0^2= 2px_0$.

Направляющий вектор прямой || оси Ox $\vec{m} = (1, 0)$,
Докажем, что (*) $\cos(\vec{n}, \vec{PF}) = \cos(\vec{n}, \vec{m})$

$$\frac{(\vec{n} \cdot \vec{PF})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{PF}|} = \frac{(\vec{n} \cdot \vec{m})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} \Rightarrow \frac{(\vec{n} \cdot \vec{PF})}{|\vec{PF}|} = \frac{(\vec{n} \cdot \vec{m})}{|\vec{m}|}$$

$\vec{PF} = \left(\frac{p}{2} - x_0, y_0\right)$; $|\vec{PF}| = r = d = x_0 + \frac{p}{2}$ |

$$\frac{\left(\vec{n}\cdot\overrightarrow{PF}\right)}{\left|\overrightarrow{PF}\right|}=\frac{\left[p\left(\frac{p}{2}-x_0\right)-y_0\left(-y_0\right)\right]}{x_0+\frac{p}{2}}=\frac{\left[\frac{p^2}{2}-px_0+\left(y_0\right)^2\right]}{x_0+\frac{p}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{p^2}{2}+px_0\right)}{x_0+\frac{p}{2}}=\frac{p\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}{\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}=p$$

$y_0^2=2px_0$ -по определению параболы

$$\frac{\left(\vec{n}\cdot\vec{m}\right)}{\left|\vec{m}\right|}=\frac{\left(p\cdot 1-y_0\cdot 0\right)}{\sqrt{1^2+0^2}}=p$$

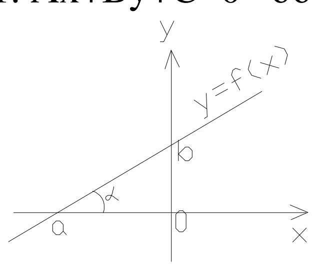
, т.к. p = p

следовательно (*) доказано =>теорема доказана.

8.Прямая на плоскости, определения и уравнения.

Прямая на плоскости Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов :

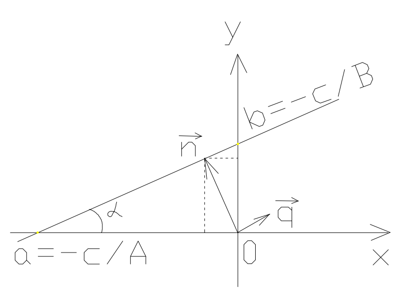
1. Ax+By+C=0 –общее уравнение прямой



y=kx+b-уравнение прямой с угловым коэффициентом k=tgα; k=-A/B , α-угол наклона прямой.

2. $y-y_0=k(x-x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ с угловым коэффициентом k.

$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ –уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ *перпендикулярно нормальному* вектору $\vec{n}(A,B)$.



3. $\frac{(x-x_0)}{l}=\frac{(y-y_0)}{m}$ -уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ *параллельно направляющему* вектору $\vec{q}(l,m)$ (*каноническое* уравнение прямой).

4.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

- уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ угловой коэффициент

или

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

5.

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases}$$

t€(-∞,+∞)-параметрические уравнения прямой

$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{q}\cdot t$ параметрические уравнения прямой в векторной форме. $\vec{r}(x,y)$, $\vec{r}_0(x_0,y_0)$ -радиус вектор точки $M_0(x_0,y_0)$, $\vec{q}(l,m)$- направляющий вектор прямой.

6.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

- уравнение прямой в отрезках, где a и b –величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy.

7. $x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0$- *нормальное уравнение прямой*, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ – направляющие косинусы нормального вектора $\vec{n}$, направленного из начала координат в сторону прямой, а $p>0$- расстояние от начала координат до прямой.

Общее уравнение прямой (1) приводится к нормальному виду (7) путем умножения всех членов уравнения (1) на *нормирующий* множитель :

$\mu = \frac{-\mathrm{sgnC}}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, sgnC-знак C

Если прямая L задана уравнением вида (7) , а M*(x*,y*)-некоторая точка Є0xy, то **δ(M*,L)=x*cosα+y*cosβ-p –** *называется отклонением точки M* от прямой L.*

Знак δ(M*,L) указывает на взаимное расположение точки M*, прямой L и начала координат, а именно: если точка M* и начало координат лежат по разные стороны от прямой L , то δ(M*,L)>0 , а если M* и начало координат находятся по одну сторону от прямой L, то δ(M*,L)<0

ρ(M*,L) =|δ(M*,L)| - расстояние от точки M* до прямой L.

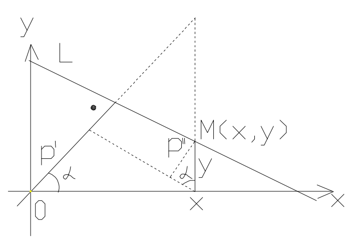
$$\frac{-\operatorname{sgn} C \cdot A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot x + \frac{-\operatorname{sgn} C \cdot B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot y - \frac{-\operatorname{sgn} C \cdot C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

$$\frac{-\operatorname{sgn} C \cdot C}{\sqrt{A^2+B^2}} = p \rangle 0$$

1. Ax+By+C=0 => (7)

$$\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{Ox}\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{Oy}\right) = \cos\beta$$



p=p'+p''

p'=x·cosα

$$p'' = y \cdot \sin\alpha = y\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \beta,$$

x·cosα+ycosβ-p=0

8.Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями :

L_1: $A_1x+B_1y+C_1=0$

L_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$, то возможны 3 случая :

а)

$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ прямые имеют общую точку $M(x_0,y_0)$

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$ решаем совместно;

б)

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ - прямые L_1 и L_2 параллельны;

в)

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ -прямые L_1 и L_2 сливаются,т.е. определяют одну и ту же прямую.

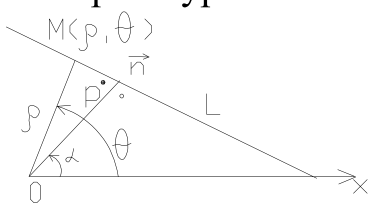
9. Уравнение пучка прямых.

Опр.: Совокупность прямых, проходящих через некоторую точку S называется *пучком прямых с центром S.*

Если L_1 и L_2 пересекаются в точке S, то уравнение $\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$, где α и $\beta\neq0$ одновременно, α, β - любые числа,уравнение определяет прямую так же проходящую через точку S, т.к. α, β - любые числа, то это уравнение пучка прямых с центром S.

Если $\alpha\neq0$ и $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$, то $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$-это уравнение определяет любую прямую пучка с центром S, кроме той, что соответствует $\alpha=0$,т.е. кроме прямой L_2: $A_2x+B_2y+C_2=0$.

10. Полярное уравнение прямой.



p-расстояние от полюса до L

α -полярный угол нормали $\vec{n}$ пусть $M(\rho,\theta) \in L$ из Δ: $\rho\cdot\cos(\theta-\alpha)=p$

$\rho = \frac{p}{\cos(\theta-\alpha)}$ -полярное уравнение прямой L ; $\rho = f(\theta)$

или :

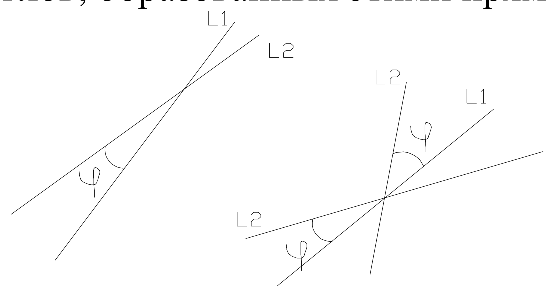
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$

$$\rho(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) = p$$

$$\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = \cos(\theta - \alpha)$$

11.Угол между прямыми L_1 и L_2 : наименьший из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

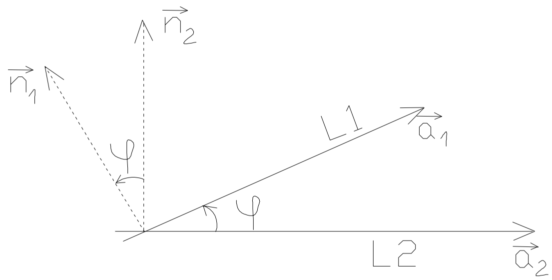


$$tg(L_1, L_2) = tg\phi = \left|\frac{(k_2 - k_1)}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$$

$$k_1 = \frac{-A_1}{B_1} \qquad k_2 = \frac{-A_2}{B_2}$$

$L_1 \| L_2$: $k_1 = k_2$

$L_1 \perp L_2$: $k_1 \cdot k_2 = -1$ => $k_2 = \dfrac{-1}{k_1}$



$$\left[\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & 0 \\ A_2 & B_2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(A_1B_2 - A_2B_1)$$

$$tg\varphi = \left|\frac{\left[\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\right]}{(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)}\right| = \left|\frac{\left[\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\right]}{(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)}\right| =$$

$$▮ = \left|\frac{(A_1 B_2 - A_2 B_1)}{A_1 A_2 + B_1 B_2}\right| = \left|\frac{\left(\frac{-A_2}{B_2} - \frac{-A_1}{B_1}\right)}{1 + \left(\frac{-A_1}{B_1}\right)\cdot\left(\frac{-A_2}{B_2}\right)}\right| = ▮ \Big|$$

делим на $B_1 \cdot B_2$

$$▮ = \left|\frac{(k_2 - k_1)}{1 + k_1 \cdot k_2}\right| \qquad \vec{n}_1(A_1, B_1) \quad \vec{n}_2(A_2, B_2)$$

$L_1 \| L_2$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad k_1 = k_2 \qquad tg\varphi = 0$$

$L_1 \perp L_2$:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \qquad k_2 = \frac{-1}{k_1} \qquad tg\varphi = \infty$$

8.1 Плоскость и прямая в пространстве.

I. Плоскость P в декартовой прямоугольной системе координат Oxyz может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) Ax+By+Cz+D=0 – общее уравнение плоскости

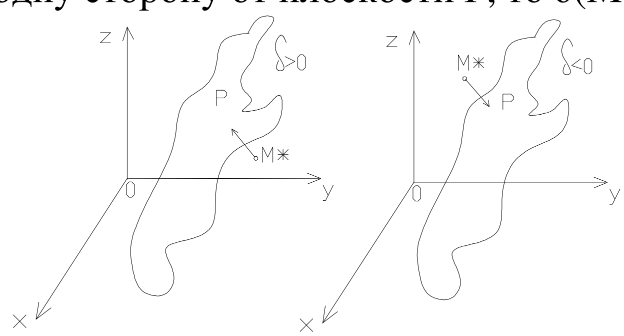
2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – уравнение плоскости P , проходящей через точку $M_0(x_0,y_0, z_0)$ перпендикулярно *нормальному вектору* $\vec{n}$ (A,B,C).

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ - уравнение плоскости P в отрезках , где а,в,с – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью P на координатных осях Ox,Oy,Oz соответственно.

4) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ -нормальное уравнение плоскости P, где cosα,cosβ,cosγ – направляющие косинусы нормального вектора $\vec{n}$, направленного из начала координат в сторону плоскости, а p>0- расстояние от начала координат до плоскости. Общее уравнение (1) приводится к нормальному виду (4) путем умножения на нормирующий множитель.

$\mu = \dfrac{-\operatorname{sgn} D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ Если P задана нормальным уравнением (4), а M*(x*,y*,z*)-некоторая точка пространства,то выражение $\delta(M^*,P)=x^*\cos\alpha+y^*\cos\beta+z^*\cos\gamma-p$, называется отклонением точки M* от плоскости P.

Знак $\delta(M^*,P)$ указывает на взаимное расположение точки M*, плоскости P и начала координат, а именно : если точка M* и начало координат лежат по разные стороны от плоскости P, то $\delta(M^*,P)>0$, а если точка M* и начало координат находятся по одну сторону от плоскости P, то $\delta(M^*,P)<0$.



Расстояние $\rho(M^*,P)$ от точки M* до плоскости P: $\rho(M^*,P)=|\,\delta(M^*,P)\,|$.

II. Прямая L в пространстве может быть задана :

1) *общими уравнениями плоскостей*, где коэффициенты A_1,B_1,C_1 *не* про-порциональны коэффициентам A_2,B_2,C_2, что равносильно заданию прямой L как линии пересечения плоскостей.

L: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

2) *параметрическими* уравнениями

$x=x_0+lt$

$y=y_0+mt$

$z= z_0+nt$

или в векторной форме: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{q} \cdot t$, где $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ -радиус-вектор некоторой точки Є L, а $\vec{q}(l, m, n)$ -направляющий вектор прямой.

3) каноническими уравнениями :

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$ Здесь L как линия пересечения трех плоскостей, проектирующих эту прямую на координатные плоскости.

Итак, прямая в пространстве :

1) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ линия пересечения двух плоскостей

2) исключая поочередно x и y из 1) получим x=az+C; y=bz+D здесь прямая определена двумя плоскостями, проецирующими ее на плоскости Oxz и Oyz

3)$M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$

L: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

4) $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ -канонические уравнения прямой,

$\vec{q}(l,m,n)$ -направляющий вектор

L: $\dfrac{x-x_1}{\cos\alpha}=\dfrac{y-y_1}{\cos\beta}=\dfrac{z-z_1}{\cos\gamma}$ α,β,γ-углы L с осями координат ,направляющие cos прямой :

$$\cos\alpha=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad \cos\beta=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \qquad \cos\gamma=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

5)введем в (4) параметр t

параметрическое уравнение L: $x=lt+x_1$

$y=mt+y_1$

$z=nt+z_1$

6)угол между двумя L_1 и L_2 :

$$\cos\gamma=\frac{\left(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\right)}{\sqrt{\left(l_1\right)^2+\left(m_1\right)^2+\left(n_1\right)^2}\cdot\sqrt{\left(l_2\right)^2+\left(m_2\right)^2+\left(n_2\right)^2}}=\left|\frac{(\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2)}{\left|\vec{q}_1\right|\cdot\left|\vec{q}_2\right|}\right|$$

условие параллельности прямых :

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$$

условие перпендикулярности :

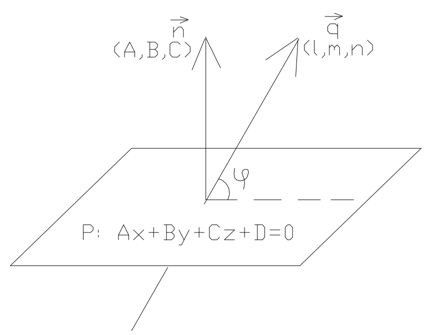
$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 n_2 = 0$

7) условие компланарности двух прямых (в одной плоскости).

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{векторов } \vec{M}_1 \vec{M}_2, \vec{q}_1, \vec{q}_2).$$

8) угол между прямой L и плоскостью P :

$$\sin\varphi = \frac{(Al + Bm + Cn)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)$$



условие параллельности прямой и плоскости :

$Al + Bm + Cn = 0$

условие перпендикулярности прямой L и плоскостью P :

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

а) $Al+Bm+Cn \neq 0$ Lпересекает P

б) $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$ L параллельно P

в) $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ то LЄP.

Плоскость в пространстве.

1) P: $Ax+By+Cz+D=0$, $A_2+B_2+C_2 \neq 0$

$\vec{n}(A, B, C) \perp P$ нормальный вектор плоскости

2) нормальное уравнение P : $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ p-расстояние от н.координат до P.

α,β,γ-углы с Ox,Oy,Oz образованные $\vec{n}$

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ -уравнение плоскости в отрезках

$a = \frac{-D}{A} \quad b = \frac{-D}{B} \quad c = \frac{-D}{C}$

4) P_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ угол φ между плоскостями

P_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$$\cos\phi = \frac{\left(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right)}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|} = \frac{\left(A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2\right)}{\sqrt{\left(A_1\right)^2 + \left(B_1\right)^2 + \left(C_1\right)^2} \cdot \sqrt{\left(A_2\right)^2 + \left[\left(B_2\right)^2 + \left(C_2\right)^2\right.}}$$

условие ‖ плоскостей : $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

условие ⊥ плоскостей : $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

5) расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости P :

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

6) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, уравнение плоскости, прох. Через точку $M_0 c\, \vec{n}(A,B,C)$

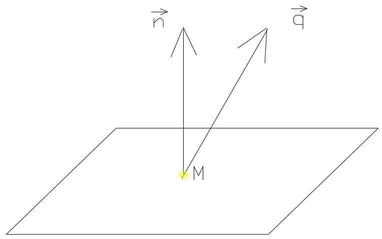
7) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ –уравнение пучка плоскостей, для любой λ –некоторая плоскость Єпучку плоскостей, проходящая через линию пересечения плоскостей P_1 и P_2, кроме плоскоси P_2.

8) уравнение плоскостей, проходящей через точки M_1,M_2,M_3:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$ - условие компланарности векторов $\vec{M_1M};\vec{M_1M_2};\vec{M_1M_3}$

9) $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и $Ax+By+Cz+D=0$ точка пересечения

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad \Rightarrow \qquad t=?\ , \quad x=?,\ y=?,\ z=?$$



Гиперплоскость П :

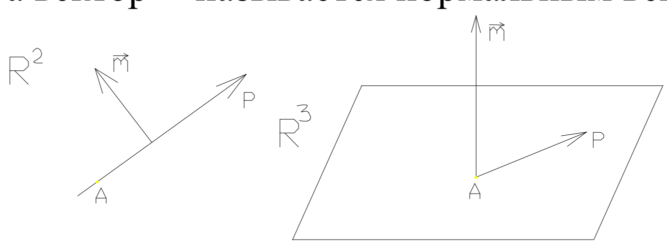
(1) $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b=0$ среди const $a_1,a_2,...,b$ хотя бы одна $\neq 0$. пусть точка А $(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2,...\mathring{x}_n)$ЄП , следовательно её координаты удовлетворяют (1) : $a_1\mathring{x}_1+a_2\mathring{x}_2+...+a_n\mathring{x}_n+b=0$ (2)

(2) точка $P(x_1,x_2,...,x_n)$ ЄП (из (1)) тогда : (1)-(2) :
$a_1x_1+...+a_nx_n+b-(a_1\mathring{x}_1+...b)=a_1(x_1-\mathring{x}_1)+a_2(x_2-\mathring{x}_2)+...+a_n(x_n-\mathring{x}_n)=$

$=(a_1,a_2,...,a_n)\cdot(x_1-\mathring{x}_1,x_2-\mathring{x}_2,...,x_n-\mathring{x}_n)=\vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AP}\cdot\vec{m}=0 \Rightarrow \overrightarrow{AP}\perp\vec{m}$

(3) $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{m}=0$ называется векторным уравнением гиперплоскости,

а вектор $\vec{m}$ называется нормальным вектором или нормаль.



Теорема : Расстояние точки $A(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2,...\mathring{x}_n)$ от плоскости П :
$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b=0$

$\rho=| a_1\mathring{x}_1+a_2\mathring{x}_2+...+a_n\mathring{x}_n+b \,|\, / \sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+\,..+(a_n)^2}$

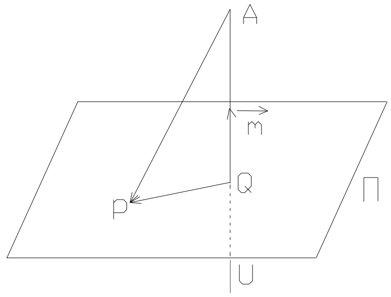
Док-во:

Нормальный вектор гиперплоскости $\vec{m}(a_1, a_2, .., a_n)$. Параметрические уравнения прямой U:

(2) $x_1=\mathring{x}_1+a_1t$
$x_2=\mathring{x}_2+a_2t$

....

$x_n=x^\circ_n+a_nt$



Прямая U и гиперплоскость П имеют общую точку Q.

(1) $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+b=0$ подставим (2) в (1)

(2) $x_1=x^\circ_1+a_1t$

$x_2=x^\circ_2+a_2t$

....

$x_n=x^\circ_n+a_nt$

$a_1(x^\circ_1+a_1t)+...+a_n(x^\circ_n+a_nt)+b=0$

$a_1x^\circ_1+...a_nx^\circ_n+b+t(a_1^{\circ 2}+a_2^{2}+...+a_n^{2})=0$

(3)$t0=t=- a_1x^\circ_1+a_2x^\circ_2+...+a_nx^\circ_n+b / a_1^{2}+a_2^{2}+...+a_n^{2}=- a_1x^\circ_1+...+ b/ \left(|\vec{m}|\right)^2$

$Q(x^\circ_1+a_1t_0; x^\circ_2+a_2t_0;...; x^\circ_n+a_nt_0)$; $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{m}=0$, т.к. $\overrightarrow{QP}\perp\vec{m}$

$\overrightarrow{AQ}=((x^\circ_1+a_1t_0)- x^\circ_1;...;(x^\circ_n+a_nt_0)- x^\circ_n)=$

$=(a_1t_0, a_2t_0,..., a_nt_0)= t_0(a_1, a_2,..., a_n)= t_0\vec{m}$

$\rho(A,П)=\rho(A,Q)= \left|\overrightarrow{AQ}\right| = \left|t_0\vec{m}\right| = \left|t_0\right|\cdot\left|\vec{m}\right|$ =>(3) =>

$=| a_1x^\circ_1+...+a_nx^\circ_n+b |\cdot\dfrac{|\vec{m}|}{\left(|\vec{m}|\right)^2} = | a_1x^\circ_1+...+a_nx^\circ_n+b | / |\vec{m}|=| a_1x^\circ_1 +...+a_nx^\circ_n+b | / \left|\sqrt{(a_1)^2+ ..+(a_n)^2}\right|$

Частные случаи:

n=2 L: $Ax+By+C=0$-прямая, точка плоскости $A(x_0,y_0)$

$\rho(A, L)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ - минимальное расстояние от точки A до прямой L.

n=3 $A(x_0,y_0,z_0)$ точка не принадлежит П.

П: Ax+By+Cz+D=0

$$\frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$ минимальное расстояние от точки до плоскости.

Пример : Найти расстояние от точки A до гиперплоскости, проходящей через точку B,C,D и E. A(-1,2,3,-4); B(-2,-5,1,2); C(-3,8,-4,0); D(5,2,3,-1); E(-1,8,-2,1).

Решение : пусть уравнение гиперплоскости

(1) $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+b=0$

точки B,C,D,E удовлетворяют (1) т.к. принадлежат П.

$-2a_1-5a_2+a_3+2a_4+b=0$

$-3a_1+8a_2-4a_3+ b=0$

$5a_1+2a_2+3a_3-a_4+b=0$

$-a_1+8a_2-2a_3+a_4+ b=0$ решим систему используя метод Гаусса

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 8 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & -4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim .... \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_1 &= 3b = 3c \\ a_2 &= -b = -c \\ a_3 &= -4b = -4c \\ a_4 &= 2b = 2c \\ b &= c \end{aligned}$$ подставим в (1)

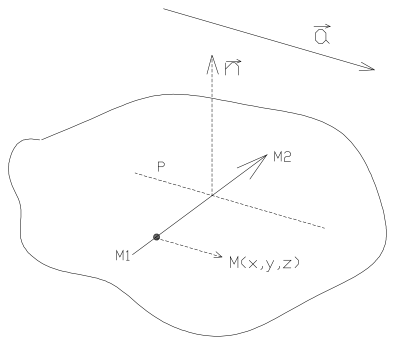
$$3cx_1 - cx_2 4cx_3 + 2cx_4 + c = 0$$ (:c)

П: $3x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 1 = 0$

$$\rho(A,\Pi) = \frac{\left|3\cdot(-1) - 2 - 4\cdot 3 + 2(-4) + 1\right|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{24}{\sqrt{30}}$$

Пример1:

Написать уравнение плоскости P, проходящей через точки M1(1,1,1) и M2(0,2,1) параллельно вектору $\vec{a}(2,0,1)$.



Решение: а) $\overrightarrow{M_1M_2}(-1,1,0)$ и $\vec{a}(2,0,1)$ неколлинеарны, значит задача имеет единственное решение. В качестве нормального вектора к плоскости может быть взят вектор

$$\vec{n}=\left[\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{a}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},$$ тогда $\vec{n}(1,1,-2)$ $\quad A=1 \quad B=1 \quad C=-2$

уравнение плоскости P : (x-1)+(y-1)-2(z-1)=0 или x+y-2z=0.
Ответ : x+y-2z=0, (т.к.здесь D=0, то P проходит через начало координат).

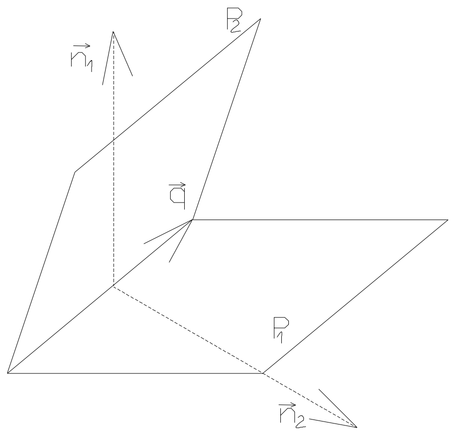
б) точка M принадлежит P только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{a}$ компланарны:

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{a}=\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=0,$$ т.е. Ответ: x+y-2z=0.

Пример 2: Прямая L задана как линия пересечения 2-ч плоскостей P_1 и P_2 :

L: P_1: x+y-z=0
P_2: 2x-y+2=0 , написать канонические уравнения этой прямой и уравнение её проекции на координатную плоскость Oxz.

Решение: точка M(0,2,2) удовлетворяет общим уравнениям прямой следовательно точка M принадлежит L.



В качестве направляющего вектора прямой может быть взят вектор $\vec{q}=\left[\vec{n}_1\times\vec{n}_2\right]$, где $\vec{n}_1(1,1,-1)$ и $\vec{n}_2(2,-1,0)$ - нормальные векторы плоскостей P_1 и P_2.

$$\vec{q}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=-\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k} \qquad \begin{matrix}\vec{q}(-1,-2,-3)\\ \vec{q}(l,m,n)\end{matrix}$$

и канонические уравнения прямой L : $\frac{x}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{-3}$

что эквивалентно системе трех уравнений :

$$-2x+y-2=0$$
$$-3x+z-2=0$$
$$-3y+2z+2=0$$

описывающих три плоскости, проектирующие прямую на координатные плоскости Oxy,Oxz и Oyz соответственно (уравнения прямой в проекциях).

Уравнение -3x+ z-2=0 – уравнение проекции прямой L на плоскость Oxz.

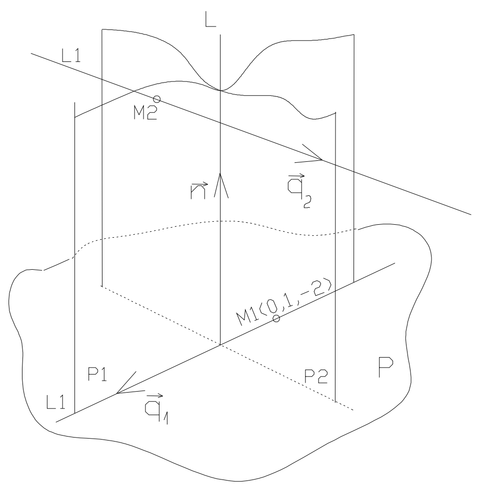
Пример3 : Заданы скрещивающиеся прямые :

L_1: $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{1}$ и

L_2: $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$

Найти расстояние $\rho(L_1,L_2)$ между прямыми и написать уравнение общего перпендикуляра L к этим прямым.

Решение:



найдем уравнение плоскости P, проходящей через прямую L_1 параллельно прямой L_2. Точка $M_1(0,1,-2)$ лежит на L_1 ,значит точка M_1 принадлежит P:

$$n = \left[\vec{q}_1 \times \vec{q}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{2}i - \vec{j} - 4\vec{k}$$

т.е.

$$\vec{n}(-2,-1,-4)$$

$$A=-2 \quad B=-1 \quad C=-4$$

P: $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$

P:$-2x-(y-1)-4(z+2)=0$ или $2x+y+4z+7=0$

Расстояние $\rho(L_1,L_2)=\rho(M_2,P)$ $M_2 \in L_2$ $M_2(-1,-1,2)$

Нормальное уравнение плоскости P :

$$\rho\left(L_1, L_2\right) = \left|\delta\left(M_2, P\right)\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{21}} - \frac{8}{\sqrt{21}} - \frac{7}{\sqrt{21}}\right| = \frac{12}{\sqrt{21}}$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{21}} - \frac{1}{\sqrt{21}}y - \frac{4}{\sqrt{21}}z - \frac{7}{\sqrt{21}} = 0$$

Составить уравнение общего перпендикуляра L : пересечение плоскостей P_1, P_2 $P_1 \perp P$ и $P_2 \perp P$ и проходящих через L_1 и L_2. Точка $M_1(0,1,-2) \in P_1$ и $\vec{n}_1 = \left[\vec{q}_1 \times \vec{n}\right] = \vec{i} - 10\vec{j} + 2\vec{k} \perp P_1$, тогда : $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ $1\cdot(x-0)-10(y-1)+2(z+2)=0$

P_1: $x-10y+2z+14=0$

Аналогично: P_2 ; $M_2(-1,-1,2) \in P_2$

$\vec{n_2} \perp P_2 \quad \vec{n_2} = \left[\vec{q_2} \times \vec{n}\right] = -\vec{9i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$

P_2: $-9(x+1) + 6(y+1) + 3(z-2) = 0$

$-9x + 6y + 3z - 9 = 0$

$P_2 \quad 3x - 2y - z + 3 = 0$

т.к. $L = P_1 \cap P_2$,

то ответ: L: $\begin{cases} x - 10y + 2z + 14 = 0 \\ 3x - 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$, как линия пересечения плоскостей P_1 и P_2.

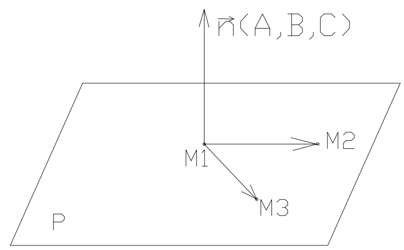
$$\rho(L_1, L_2) = \frac{12}{\sqrt{21}}$$

Пример 4: Написать уравнение плоскости , проходящей через три заданные точки: $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$ и $M_3(3,0,1)$.

Решение:

$\overrightarrow{M_1 M_2}(1, -1, 1)$

$\overrightarrow{M_1 M_3}(2, -2, 1)$



$$\vec{n}(A,B,C) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1+2) - \vec{j}(1-2) + \vec{k}(0) = \vec{i} + \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

$\vec{n}(1,1,0) \qquad$ P: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ -уравнение плоскости

P:

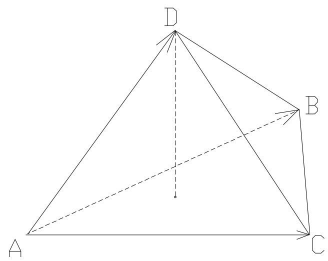
$1(x-1) + 1(y-2) + 0(z-0) = 0$

$x - 1 + y - 2 = 0$

Ответ: P: $x + y - 3 = 0$

Пример5: Даны вершины тетраэдра. A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7) и D(-5,-4,8).Найти длину высоты, опущенной из вершины D.

Решение:



$\vec{AB}(2,-2,-3)$

$\vec{AC}(4,0,6)$

$\vec{AD}(-7,-7,7)$ -смешанное

$$V_{par} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = \vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD} = 308$$

произведение векторов (V_{par}=$V_{пар}$)

Vтетр.= $\frac{1}{6}\cdot \mathrm{Vpar} = \frac{1}{6}\cdot 308$

$S_{\Delta ABC}$= $\frac{1}{2}\cdot\left|\left[\vec{AB}\cdot\vec{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2} = 14$

$$(\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right]) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-12)\,\vec{i} + (-24)\,\vec{j} + 8\vec{k}$$

h=3$V_{тетр.}$/$S_{осн.}$= $\dfrac{3\cdot\frac{1}{6}\cdot 308}{14} = \dfrac{308}{28} = 11$

Ответ: h=11.

Пример6: проверить, что векторы $\vec{a} = 7\cdot\vec{i} + 6\cdot\vec{j} - 6\cdot\vec{k}$ и $\vec{b} = 6\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + 9\cdot\vec{k}$ могут быть взяты за ребра куба. Найти третье ребро.

Решение:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\right) = (6\cdot 7 + 6\cdot 2 - 6\cdot 9) = 42 + 12 - 54 = 0$ => $\vec{a}\perp\vec{b}$.

$$\vec{c} = \lambda\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 6 & -6 \\ 6 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \lambda\cdot(-66\cdot\vec{i} + 99\cdot\vec{j} - 22\cdot\vec{k}) = 11\lambda(6\cdot\vec{i} + 9\cdot\vec{j} - 2\cdot\vec{k})$$

если $\lambda = \frac{1}{11}$, то $\vec{c} = 6\cdot\vec{i} + 9\cdot\vec{j} - 2\cdot\vec{k}$ и $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{36+81+4} = 11$;

если $\lambda = \frac{-1}{11}$, то $\vec{c} = -6\cdot\vec{i} - 9\cdot\vec{j} + 2\cdot\vec{k}$ и $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{36+81+4} = 11$.

Ответ: $\vec{c} = 6\cdot\vec{i} + 9\cdot\vec{j} - 2\cdot\vec{k}$ или $\vec{c} = -6\cdot\vec{i} - 9\cdot\vec{j} + 2\cdot\vec{k}$.

Пример*: Даны вершины ΔABC: A(1,-1,-3), B(2,1,-2) и C(-5,2,-6). Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

Решение : найдем разложение вектора $\overrightarrow{AE}$ по базису из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Обозначим : $\vec{e}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$ и $\vec{e}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ - орты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Тогда вектор $\overrightarrow{AE}$ сонаправлен с вектором $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, т.е. .... $\lambda > 0$ такое, что

(4) $$\overrightarrow{AE} = \lambda\cdot\vec{e} = \lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\right)$$

С другой стороны :

(5) $$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + \mu\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \mu\cdot\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \mu\cdot\overrightarrow{AB} + (1-\mu)\cdot\overrightarrow{AC}, \mu > 0$$

Формулы (4) и (5)- два разложения вектора $\overrightarrow{AE}$ по базису из векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.Т.к. разложение *единственно*, то

(6) $$\frac{\lambda}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \mu \qquad \frac{\lambda}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 1-\mu$$

(6) → $$\lambda = \frac{1}{\frac{1}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} + \frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

(4) →(7) $$\overrightarrow{AE} = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|}\cdot\overrightarrow{AC}$$

Из условий задачи находим : $\overrightarrow{AB}(2-1, 1+1, -2+3)$

$\overrightarrow{AB}(1,2,1)$ $\quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$; $\overrightarrow{AC}(-6,3,-3)$ $\quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = 3\sqrt{6}$

(7)=> $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AC} = \left[\frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot(-6), \frac{3}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 3, \frac{3}{4} + \frac{-3}{4}\right]\Big|$ откуда

$\overrightarrow{AE}\left(\frac{-3}{4}, \frac{9}{4}, 0\right)$ $\qquad \left|\overrightarrow{AE}\right| = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{10}$.

Пример**:В треугольнике ABC с вершинами A(1,-1,2),B(5,-6,2) и C(1,3,-1) найти высоту h= $\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

Решение:

$\vec{AB}(4,-5,0) \qquad \vec{AC}(0,4,-3) \qquad \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{16+9} = 5$

$$S = \left|\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right]\right|$$

$$\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\cdot\vec{i} + 12\cdot\vec{j} + 16\cdot\vec{k}$$

$$\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right] = (15,12,16)$$

=> $S = \left|\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right]\right| = \sqrt{15^2+12^2+16^2} = 25$

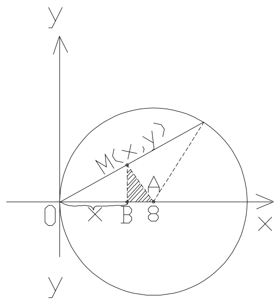
S=2·S_Δ= $2\cdot\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{2}\cdot h = \left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot h$

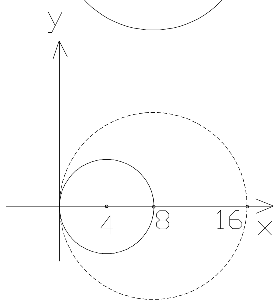
$$h = \frac{S}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{25}{5} = 5$$

Ответ: h=5.

К.Р.

1.Через начало координат проведены всевозможные хорды окружности $(x-8)^2+y^2=64$.Составить уравнение геометрического места середин этих хорд.





Решение:M(x,y)-середина произвольной хорды.AM перпендикулярна хорде. $MA = \sqrt{(8-x)^2 + y^2}$ из треугольника ABM. Треугольники OAM и ABM-подобны.

$$\frac{MA}{8-x} = \frac{8}{MA}$$

$$MA^2 = 8(8-x)$$

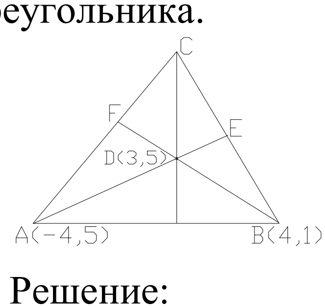
$$(8-x)^2 + y^2 = 8(8-x)$$

$$64 - 16x + x^2 + y^2 - 64 + 8x = 0$$

$$y^2 + (x-4)^2 = 16$$

Ответ: $y^2 + (x-4)^2 = 16$ -окружность.

2.Даны две вершины треугольника A(-4,5) и B(4,1) и точка пересечения его высот D(3,5).Составить уравнения сторон треугольника.



Решение:

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

AB $\frac{y-5}{1-5}=\frac{x+4}{4+4}$

$\frac{y-5}{-4}=\frac{x+4}{8}$

$8(y-5)=-4(x+4)$

$2(y-5)=-x-4$

AB: $x+2y-6=0$

BDF: $\frac{y-1}{5-1}=\frac{x-4}{3-4}$ **=>** -(y-1)=4(x-4)

BDF:4x+y-17=0 **=>** $k=\frac{-A}{B}=-4$

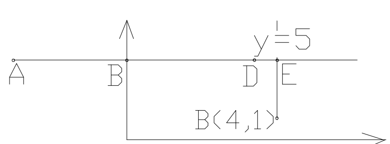
BF⊥AC**=>** $k_{AC}=\frac{-1}{k}=\frac{1}{4}$

AC: $y-y_A=k_{AC}(x-x_A)$; $(y-5)=\frac{1}{4}\cdot(x+4)$

AC: x-4y+24=0

ADE: $\frac{y-5}{5-5}=\frac{x+4}{3+4}$ **=>** 7(y-5)=0**=>**y=5

ADE:0·x+y-5=0 $k=\frac{-A}{B}=0$



т.к. ADE-высота, то ADE⊥BE , следовательно BE: x=const,т.к. координаты точки B(4,1), то x=4.

BC: x=4.

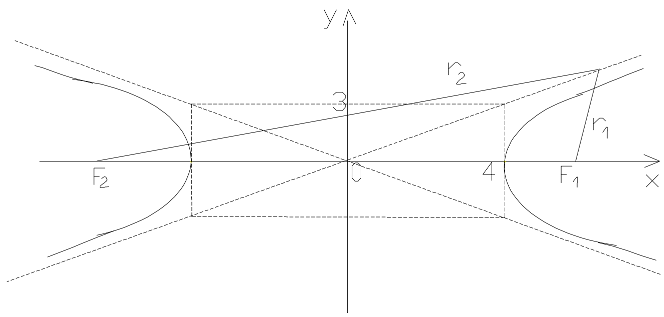
Ответ : стороны треугольника:

AB: x+2y-6=0

AC: x-4y+24=0

BC: x=4.

3. На гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Найти точку, для которой расстояние от левого фокуса вдвое больше, чем от правого.



Решение: a=4,b=3 на правой ветви точка M(x,y). $r_1=\varepsilon x-a, r_2=\varepsilon x+a$, $r_2=2r_1$.

$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16-9} = 5 \qquad \varepsilon = \frac{c}{a}$

$(\varepsilon x + a) = 2(\varepsilon x - a)$

$\varepsilon x + a = 2\varepsilon x - 2a$ **=>** $x = \frac{3a}{\varepsilon} = \frac{3a^2}{c} = \frac{3\cdot16}{5}$

$3a = \varepsilon x$

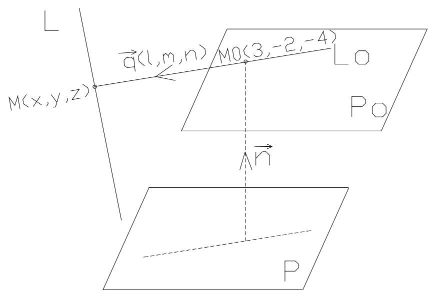
$\frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{16} - 1 = \frac{16^2\cdot9}{7\cdot16} - 1 = \frac{144-25}{25} = \frac{119}{25}$

$y^2 = \frac{9\cdot119}{25} \qquad y = \pm\ \frac{3\sqrt{119}}{25}$

Ответ: точка M$\left(\frac{3\cdot16}{5}, \frac{3\sqrt{119}}{5}\right)$

точка M $\left(\frac{3\cdot16}{5}, \frac{-3\sqrt{119}}{5}\right)$.

4. написать канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_0(3,-2,-4)$ параллельно плоскости P:3x-2y-3z-7=0 и пересекает прямую L: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$.



Решение: Проведем через точку M_0 и L_0 плоскость P_0 параллельную P. $\vec n(3,-2,-3)$ из условия

P_0 $3(x-3)-2(y+2)-3(z+4)=0$

$3x-9-2y-4-3z-12=0$

P_0 $3x-2y-3z-25=0$

Плоскость P_0 пересекает прямую L,т.е. имеет одну общую точку M(x,y,z):

$$3x-2y-3z-25=0$$

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-1}{2}=t$$

$\begin{cases} x=3t+2 \\ y=-2t-4 \\ z=2t+1 \end{cases}$ подставим в уравнение плоскости

$3(3t+2)-2(-2t-4)-3(2t+1)-25=0$, отсюда t=2

$\begin{cases} x=8 \\ y=-8 \\ z=5 \end{cases}$ $M(8,-8,5)$

$\overrightarrow{M_0M}(8-3,-8+2,5+4)$

$\overrightarrow{M_0M}(5,-6,9)=\vec q(l,m,n)$

Ответ: L_0 $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{-6}=\dfrac{z+4}{9}$.

8.2. Поверхности и кривые в пространстве.

(1) F(x,y,z)=0

(2) z=f(x,y)

Точка M(x,y,z) принадлежит поверхностиS , если ее координаты x,y,z удовлетворяют уравнению (1) или (2).

(3)Г: S_1: $F_1(x,y,z)=0$

S_2: $F_2(x,y,z)=0$ Кривая Г в пространстве определяется как линия пересечения некоторых поверхностей S1 и S2.

8.2.1. *Алгебраической поверхностью второго порядка* называется поверхность S, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид :

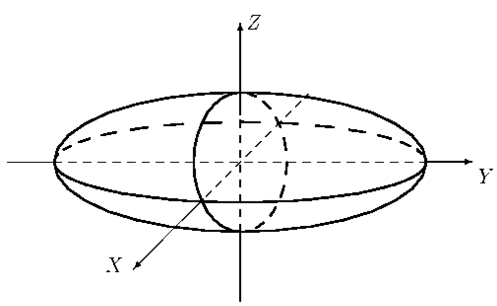
(4) S: $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0$, где $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq0$, не равны нулю одновременно к-ты при членах второго порядка.

Если A,B,C, D,E,F=0, S то -алгебраическая поверхность первого порядка-плоскость.

Вырожденная поверхность: пустое множество, точка, плоскость, пара плоскостей, прямая.

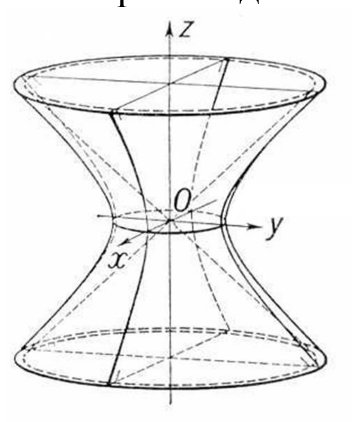
Если поверхность *невырожденная*, то преобразованием декартовой прямоугольной системы координат уравнение (4) может быть приведено к одному из уравнений, называемых *каноническими* и определяющих тип поверхности.

1.Эллипсоид.

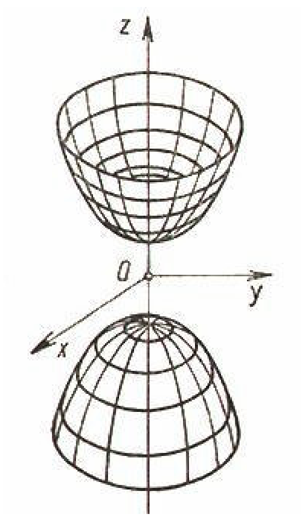


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

2.Гиперболоид.

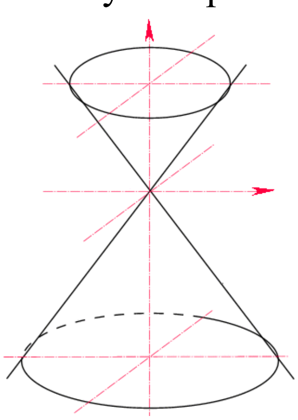


а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - однополостный



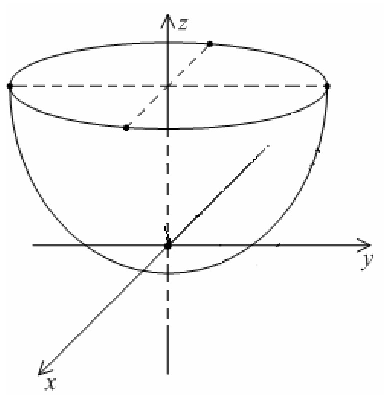
б)двуполостный $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

3.Конус второго порядка(Световой конус).

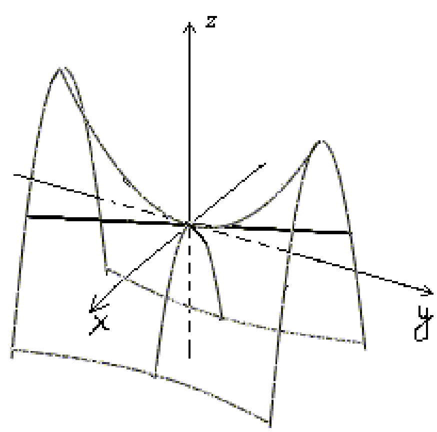


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

4.Параболоид.



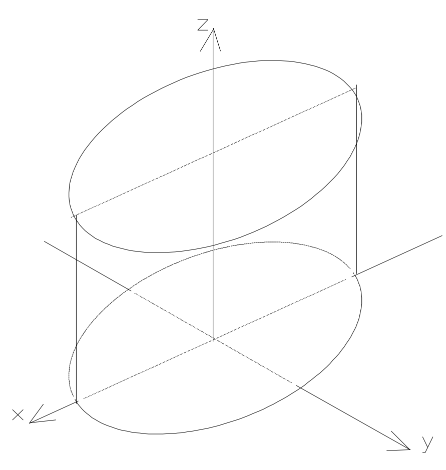
а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ - эллиптический



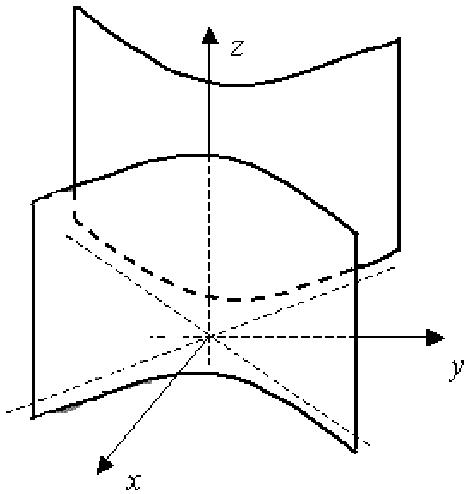
$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ -гиперболический

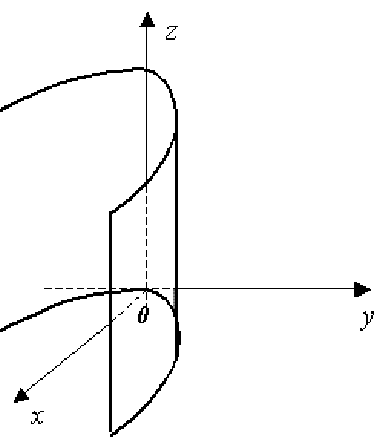
5.Цилиндр второго порядка.



а)эллиптический $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ для любых z.



б) гиперболический $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,для любых z.



в)параболический $y^2 = 2px \quad p > 0, \forall z$

Основным методом исследования формы поверхности по её уравнению является метод сечений.

Пример1:Методом сечений исследовать форму и построить поверхность, заданную уравнением:

$$z = 2 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}$$

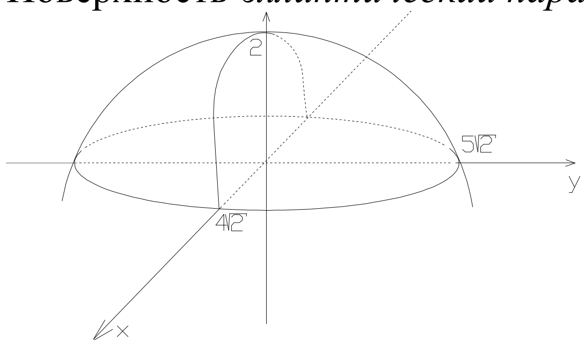
Решение: Всечении поверхности горизонтальной плоскостью z=h имеем кривую : Г: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 2 - h$ при h>2 нет решений, при h≤2-

эллипс с полу-осями $\begin{matrix} a = 4\sqrt{2-h} \\ b = 5\sqrt{2-h} \end{matrix}$.Эллипс в сечениях z=h≤2 подобны между собой $\frac{a}{b} = \text{const} = \frac{4}{5}$.

Сечение плоскостью Oxz: y=0, кривая $x^2=16(2-z)$ –парабола с параметром p=8, вершина в точке x=0, z=2, ветви вниз.

Сечение плоскостью Oyz: x=0,парабола $y^2=25(2-z)$ с параметром p=25/2, вершиной в точке y=0, z=2, ветви вниз.

Поверхность-*эллиптический параболоид.*



Эллиптический параболоид

Преобразование координат x'=x,y'=y, z'= 2-z(которое сводится к сдвигу начала координат в точку (0,0,2)-вершину параболоида и обращению направления оси Oz)приводит его исходное уравнение к каноническому виду : $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{25} = z'$.

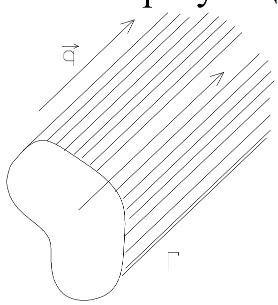
8.2.2.Классификация поверхностей по типу преобразований симметрии.

В зависимости от типа симметрии выделяют три класса поверхностей: *цилиндрические*, *конические* и *поверхности вращения.*

Опр.: Цилиндрической поверхностью(цилиндром) называется поверхность, инвариантная относительно преобразований параллельного переноса $T(t\vec{q})$, определяемых любым вектором, коллинеарным некоторому вектору $\vec{q}(l, m, n)$.

Если точка $M_0(x_0,y_0, z_0)$ Є цилиндру S, то и вся прямая L: $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ также принадлежит этому цилиндру S.LЄS

Опр.: Всякая прямая, коллинеарная вектору $\vec{q}(l, m, n)$, называется *осью* цилиндра S, прямые $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, целиком принадлежащие цилиндру, называются его *образующими*; всякая кривая Г, лежащая на цилиндре и пересекающая все его образующие называется *направляющей* этого цилиндра.



пусть $\vec{q}(l, m, n)$ -любой вектор, коллинеарный оси цилиндра S, а направляющая Г задана уравнениями: $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$.

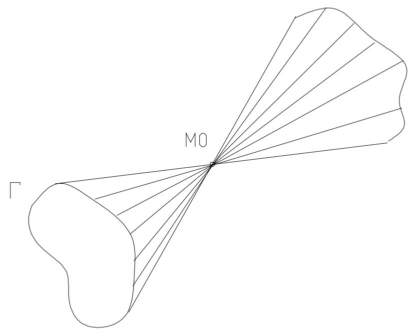
Точка $M(x,y,z) \in S$, если .... число t такое, что точка с координатами x+tl,y+tm,z+tn лежит на направляющей Г,т.е.:

$F_1(x+tl,y+tm,z+tn)=0$

$F_2(x+tl,y+tm,z+tn)=0$.

Исключая параметр t из системы, получим соотношение вида $F(x,y,z)=0$, которое является уравнением заданного цилиндра.

Опр.: Конической поверхностью(конусом) называется поверхность, инвариантная относительных преобразований относительно центра в некоторой точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, называемой *вершиной* конуса S.Если точка $M_1(x_1,y_1,z_1) \in S$, то вся прямая $\frac{x - x_1}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_0}$, проходящие через точку M_1 и вершину M0 целиком лежит на конусе S и называется *образующей* конуса. Всякая кривая Г,лежащая на конусе и пересекающая все его образующие называется *направляющей* этого конуса.



пусть задан конус S с вершиной $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и направляющей Г: $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$

Точка M(x,y,z) Є S, если .число t такое, что точка с координатами (x+t(x-x0),y+t(y-y0),z+t(z-z0)) лежит на направляющей Г :

(5) $\begin{cases} F_1(x+t(x-x_0),y+t(y-y_0),z+t(z-z_0))=0 \\ F_2(x+t(x-x_0),y+t(y-y_0),z+t(z-z_0))=0 \end{cases}$

Исключая параметр t из системы, получим уравнение конуса в виде F(x,y,z)=0.

Пример: Написать уравнение конуса, вершина которого находится в Точке M0 , а направляющая задана уравнениями F(x,y)=0, z-h=0.

Решение:

(5) F(x+t(x-x0),y+t(y-y0))=0

z + t(z-z0)- h=0 **=>**

$$t=\frac{h-z}{z-z_0}=\frac{h-z_0-(z-z_0)}{z-z_0}=\frac{h-z_0}{z-z_0}-1$$

, подставим в первое уравнение:

(6) $$F\left[x_0+(h-z_0)\cdot\frac{x-x_0}{z-z_0},y_0+(h-z_0)\cdot\frac{y-y_0}{z-z_0}\right]=0$$

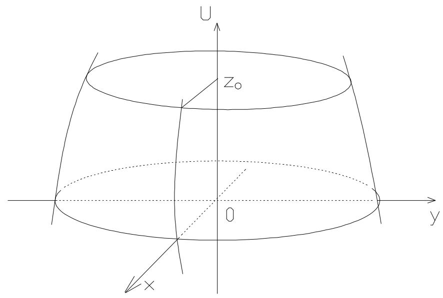
-уравнение заданного конуса.

В частном случае, если x0=0,y0=0, z0=0,т.е. вершина в начале координат,то уравнение конуса:

(7) $$F\left(h\cdot\frac{x}{z},h\cdot\frac{y}{z}\right)=0$$

уравнение(7) однородно относительно x,y, z т.е. не меняется при замене x,y, z на tx,ty,tz и для любых t≠0, а уравнение (6) однородно относительно $x-x_0,y-y_0,z-z_0$.

Опр.:



Поверхностью вращения,называется поверхность,инвариантная относительно поворотов $R(\varphi,U)$на любой угол φ вокруг некоторой фиксированной оси U. Поверхность может быть получена вращением вокруг оси U кривой, получающейся в сечении поверхности любой плоскостью, проходящей через ось симметрии.

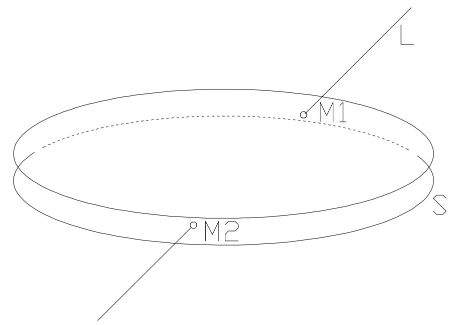
Пример: Вывести уравнение поверхности, образованной вращением кривой $F(x,z)=0,y=0$ вокруг оси Oz.
Решение: Сечение поверхности произвольной плоскостью $z=z_0$ есть окружность с центром в точке $C(0,0, z_0)$и радиусом x_0, причем $F(x_0,z_0)=0$, поэтому для произвольной точки $M(x,y,z)$ этой окружности имеем : $z=z_0$ и $\rho(M, Oz) = \sqrt{x^2 + y^2} = x_0$. Подставляя эти равенства в соотношение $F(x_0,t_0)=0$ получаем : $F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$ - уравнение заданной поверхности.

Пример: Вывести уравнение поверхности, каждая точка которой расположена вдвое ближе к точке A(2,0,0), чем к точке B(-4,0,0).
Решение: S-искомая поверхность, пусть точка $M(x,y,z) \in S$,тогда

$$\rho(M, B) = 2\rho(M, A)$$

$\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2}$,упростим: $x^2 - 8x + y^2 + z^2 = 0$, выделим полный квадрат: $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16$, S-сфера,r=4, с центром в точке $M_0(4,0,0)$.

Пример:Найти точки пересечения поверхности и прямой:



S $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$

L $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}=t$

Решение :

Переходим к параметрическим уравнениям прямой:

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$$

$$\begin{aligned} x-3&=3t\\ y-4&=-6t\\ z+2&=4t \end{aligned} \quad \| \rightarrow \quad \begin{aligned} x&=3(1+t)\\ y&=4-6t\\ z&=2(2t-1) \end{aligned}$$

подставляем значения в $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$:

$\frac{9(1+t)^2}{81}+\frac{4(2-3t)^2}{36}+\frac{4(2t-1)^2}{9}=1$, упростим: $26t(t-1)=0 \rightarrow \begin{matrix} t_1=0 \\ t_2=1 \end{matrix}$,

подставляем значения t и получаем : $M_1(3,4,-2)$ $M_2(6,-2,2)$.

Ответ: $M_1(3,4,-2)$ $M_2(6,-2,2)$.

Пример: При каком значении a прямая L : L $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{a}=t$

касается поверхности S $x^2+2y^2+4z^2=2$.

Решение:

$$\begin{aligned} x&=t+1\\ y&=t+1\\ z&=at \end{aligned}$$

$x^2+2y^2+4z^2=2$, подставляем значения x,y,z в уравнение

$x^2+2y^2+4z^2=2$, получаем: $(t+1)^2+2(t+1)^2+4a^2t^2=2$, упрощаем:

$\left(3+4a^2\right)t^2+6t+1=0$.Находим корни :

$$t_{1,2}=\frac{-3+-\sqrt{9-3-4a^2}}{3+4a^2}=\frac{-3+-\sqrt{6-4a^2}}{3+4a^2}$$.

1) если $6-4a^2\neq 0$, то существует две точки пересечения !

2) если $6-4a^2=0$, то существует одна точка касания!отсюда : $a^2=\frac{6}{4}$

$a=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

Ответ: $a=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Пример: исследовать форму кривой Г, заданной уравнениями :

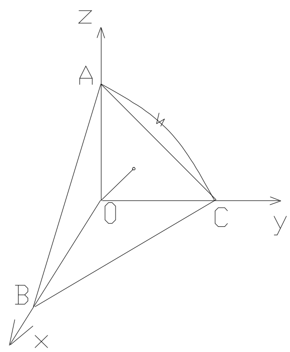
Г: сфера: $(x-1)^2+y^2+z^2=36$
плоскость: $y+z=0$
Определить вид её проекции на плоскость Oxy.

Решение: Центр сферы точка C(1,0,0), плоскость y= -z для любых x проходит через точку C, значит сечение-окружность с центром C, радиус R=6.
Найдем форму проекции окружности Г на Oxy:
Подставим z=-y **=>** $(x-1)^2+y^2+(-y)^2=36$

$$\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{2y^2}{36}=1 \qquad \frac{(x-1)^2}{36}+\frac{y^2}{18}=1$$

-эллипс с центром в точке C'(1,0), полуоси $a=6$ $b=3\sqrt{2}$.

Пример: Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью P: $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.
Решение:



A(0,0,2); B(6,0,0),C(0,-4,0)

$$|\delta| = \frac{12}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{12}{7}$$ - расстояние от O до плоскости.

$$\overrightarrow{AB} = (6,0,-2) \qquad \overrightarrow{AC} = (0,-4,-2)$$

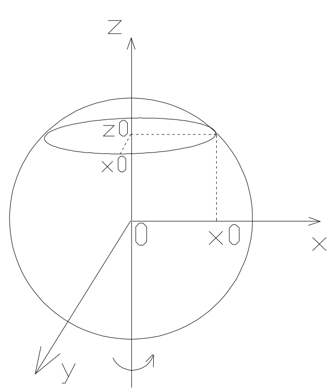
$$\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -8\cdot\vec{i} + 12\cdot\vec{j} - 24\cdot\vec{k}$$

$$S_{par} = \left|\left[\vec{AB}\times\vec{AC}\right]\right| = 4\cdot\sqrt{4+9+36} = 28 \qquad S_{\Delta} = \frac{28}{2} = 14$$

$$V_{pir} = \frac{1}{3}\cdot 14\cdot\frac{12}{7} = 8$$

$$V_{pir} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 8$$

5.Линия $x^2+pz^2=10$ вращается вокруг оси Oz. Составить уравнение поверхности вращения и подобрать значение параметра p так, чтобы точка A(1,1,2) лежала на поверхности.



Решение: $$\frac{x^2}{10} + \frac{z^2}{\frac{10}{p}} = 1$$, если p>0-эллипс.

Эллипс вращается вокруг Oz. Рассмотрим произвольное сечение эллипсоида плоскостью $z=z_0$.В сечении окружность радиуса x0 по условию : $x_0^2+pz_0^2=10$ **=>** $x_0^2=10-pz_0^2$. Уравнение окружности в сечении $x^2+y^2=x_0^2$. Имеем

$$\begin{cases} z = z_0 \\ x^2 + y^2 = 10 - p \cdot (z_0)^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 10 - p \cdot z^2$$

Уравнение поверхности вращения : $x^2+y^2+pz^2=10$, точка A(1,1,2) лежит на поверхности : $1^2+1^2+p\cdot 4=10$ **=>** p=2

Поверхность : $x^2+y^2+2z^2=10$

Ответ: Эллипсоид $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{10}+\frac{z^2}{5}=1$.

Упрощение общего уравнения кривой второго порядка.

(1) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ –общее уравнение кривой второго порядка.

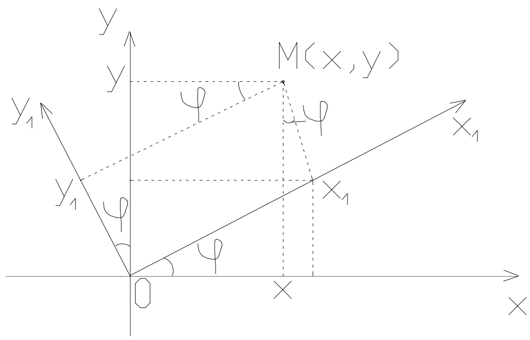
Задача упрощения уравнения-*в устранении* слагаемого, содержащего произведение xy.

Метод-*поворот осей координат* на угол φ без смещения начала координат.

Если φ-угол поворота, x и y-первоначальные координаты точки,x_1 и y_1-координаты той же точки в новой, повернутой системе координат, то преобразование координат:

(2) $x=x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi$ или $x_1=x\cos\varphi+y\sin\varphi$

$y=x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi$ $\quad y_1=-x\sin\varphi+y\cos\varphi$



Если после перехода в систему координат Ox_1y_1 слагаемое, содержащее xy в уравнении (1) исчезнет, но останутся Dx и Ey(такого вида,содержащие x и y), то последующим параллельным переносом осей координат можно привести уравнение (1) к каноническому виду.

Пример: Привести к каноническому виду уравнение кривой:
(3) $5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$ и найти координаты центра в первоначальной системе координат.

Решение: Начнем с поворота осей координат.Подставим (2) в (3).

$$5(x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi)^2+4(x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi)(x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi)+$$
$$+8(x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi)^2-32(x_1\cos\varphi-y_1\sin\varphi)-56(x_1\sin\varphi+y_1\cos\varphi)+80=0$$

Раскроем скобки, приведем подобные.
Получим:

$$(5\cos^2\varphi+4\sin\varphi\cos\varphi+8\sin^2\varphi)x_1^2+(6\sin\varphi\cos\varphi-4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi)x_1y_1+$$
$$+(5\sin^2\varphi-4\sin\varphi\cos\varphi+8\sin^2\varphi)y_1^2-(32\cos\varphi+56\sin\varphi)x_1+(32\cos\varphi-56\sin\varphi)y_1+80=0$$

$6\sin\varphi\cos\varphi-4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi=0$ Делим на $\cos^2\varphi$

$$\frac{6\sin\phi\cdot\cos\phi}{\cos^2\phi}-4\cdot\frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi}+4=0$$

(*) $2\operatorname{tg}^2\phi-3\operatorname{tg}\phi-2=0$ -уравнение для определения угла поворота φ.

Если подставлять (2) в (1) и сделать аналогичные преобразования, то уравнение для определения тангенса угла поворота будет:

(4) $B\operatorname{tg}^2\alpha+(A-C)\operatorname{tg}\alpha-B=0$

Решаем квадратное уравнение (*).

$$\operatorname{tg}\phi=\frac{3+-\sqrt{9+16}}{4}\qquad(\operatorname{tg}\phi)_1=2\qquad(\operatorname{tg}\phi)_2=\frac{-1}{2}$$

Из tgφ =2 следует, что угол поворота φ находится в первой-третей четвертях, а из tgφ =-1/2 –во второй-четвертой четвертях. Всегда принято брать положительное значение tgφ>0, а угол поворота φ в первой четверти 0<φ<π/2.

(5) $\sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$ $\qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$

(5) **=>**

$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \sin\varphi\cdot\cos\varphi = \frac{2}{5}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{4}{5} \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{5}$$

подставим, получим $9(x_1)^2 + 4(y_1)^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}\cdot x_1 + \frac{8}{\sqrt{5}}\cdot y_1 + 80 = 0$

$$9\left[(x_1)^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}\cdot x_1\right] + 4\left[(y_1)^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot y_1\right] + 80 = 0$$.

Выделяем полные квадраты

$$9\left[\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{64}{5}\right] + 4\left[\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] + 80 = 0$$.

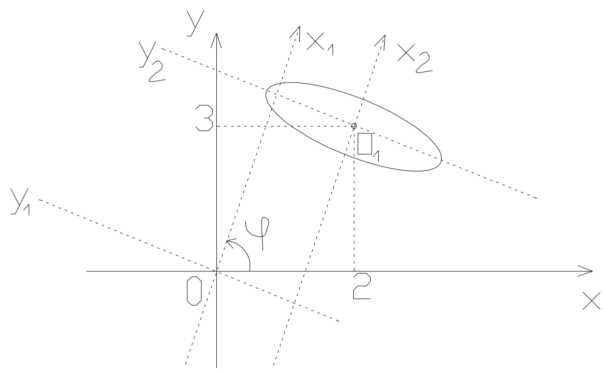
$$9\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36$$

$$\frac{\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}{4} + \frac{\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{9} = 1$$

Эллипс со смещенным центром в точку $(x_1,y_1)=\left(\frac{8}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ в Ox_1y_1.Обозначим центр $O_1\left(\frac{8}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$. Введем систему координат $O_1x_2y_2$, параллельным смещением осей координат совместим начало координат с центром эллипса. т.е.

$$x_2 = x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$$ **=>** $\frac{(x_2)^2}{4} + \frac{(y_2)^2}{9} = 1$ каноническое уравнение эллипса.



Точка $O_1\left(\frac{8}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ в исходной системе координат Oxy имеет координаты : $O_1(x,y)=O_1(2,3)$.

$$x = x_1\cos\phi - y_1\sin\phi = \frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y = x_1\sin\phi + y_1\cos\phi = \frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{16-1}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{15}{5} = 3$$

Пример:

$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

$4xy+3y^2+16x+12y-36=0$

$B\cdot tg^2\alpha+(A-C)tg\alpha-B=0$

$(4)\rightarrow 2tg^2\varphi-3tg\varphi-2=0$

$$tg\phi = \frac{3 + -\sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 + -5}{4} \qquad tg\phi = 2$$

$$\sin\phi = \frac{tg\phi}{\sqrt{1+tg^2\phi}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$x = \frac{x_1 - 2y_1}{\sqrt{5}} \qquad y = \frac{2x_1 + y_1}{\sqrt{5}} \quad <= \quad \begin{matrix} x = x_1\cos\phi - y_1\sin\phi \\ y = x_1\sin\phi + y_1\cos\phi \end{matrix}$$

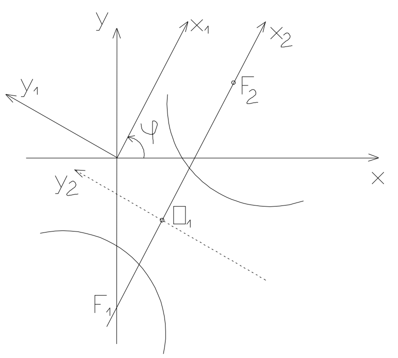
подставим (6) в условие :

$$4\left(x_1\right)^2 - \left(y_1\right)^2 + 8\sqrt{5}\cdot x_1 - 4\sqrt{5}\cdot y_1 - 36 = 0$$

Выделяем полный квадрат :

$$\frac{\left(x_1+\sqrt{5}\right)^2}{9} - \frac{\left(y_1+2\sqrt{5}\right)^2}{36} = 1$$

-гипербола со смещенным в точку $O_1\left(-\sqrt{5},-2\sqrt{5}\right)$, центром в Ox_1y_1. $x_1=-\sqrt{5}$, $y_1=-2\sqrt{5}$.



Координаты точки O_1 в Oxy:

(6)**=>**

$$x = \frac{-\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3$$

$$y = \frac{-2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -4$$

$O_1(3,4)$.

Квадратичная форма и её приведение к каноническому виду.

Опр.: Квадратичной формой называется выражение $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ соответствующее вектору $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,n-мерного пространства, ($a_{ij} = a_{ji}$) или в раскрытом виде:

$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\ldots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n+a_{nn}x_n^2$

Квадратичная форма определяется заданием симметричной матрицы $A=(a_{ij})$

Зная характеристические числа матрицы A - $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ можно сразу записать канонический вид квадратичной формы в виде: $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$ (у симметричной матрицы все корни характеристического уравнения действительные).

1.Построить ортонормированную систему векторов.

$\alpha_1=(1,4,1);\alpha_2=(-1,-13,-1);\alpha_3=(-8,9,-10)$ – заданные векторы α_1, α_2, α_3.

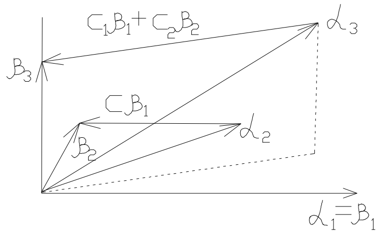


Схема Грэма-Шмидта (Gram-Schmidt)

Пусть $\beta_1 = \alpha_1 = (1,4,1)$

$\beta_2 = \alpha_2 + c\beta_1$, $c = \frac{-(\alpha_2\cdot\beta_1)}{(\beta_1\cdot\beta_1)} = \frac{-(-54)}{18} = 3$,

$\alpha_2\beta_1 = (-1\cdot1 - 13\cdot4 - 1\cdot1) = -54$

$\beta_1\beta_1 = (1\cdot1 + 4\cdot4 + 1\cdot1) = 18$;

$\beta_2 = (-1,-13,-1) + 3(1,4,1) = (2,-1,2)$

$\beta_3 = \alpha_3 + c_1\beta_1 + c_2\beta_2$

$c = \frac{-(\alpha_3\cdot\beta_1)}{(\beta_1\cdot\beta_1)} = \frac{-18}{18} = -1$

$c = \frac{-(\alpha_3\cdot\beta_2)}{(\beta_2\cdot\beta_2)} = \frac{-(-45)}{9} = 5$

$\alpha_3\beta_1 = (-8\cdot1 + 9\cdot4 - 10\cdot1) = 18$

$\alpha_3\beta_2 = (-8\cdot2 + 9\cdot(-1) - 10\cdot2) = -45$

$\beta_2\beta_2 = (2\cdot2 + (-1)\cdot(-1) + 2\cdot2) = 9$

$\beta_3 = (-8,9,-10) - (1,4,1) + 5(2,-1,2)$

$\beta_3 = (1,0,-1)$

Получим систему ортогональных векторов :

$\beta_1 = (1,4,1)$ $\beta_2 = (2,-1,2)$ $\beta_3 = (1,0,-1)$

Ортонормированная система векторов:составленная из *ортов этих векторов*

$|\beta_1| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ $|\beta_2| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

$|\beta_3| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$$e_1 = \frac{\beta_1}{|\beta|} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot (1,4,1) = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$e_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{1}{3} \cdot (2,-1,2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$e_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,0,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

2.Теорема: Каждая симметричная матрица имеет ортогональную матрицу , состоящую из собственных векторов матрицы А. AC=CD, где D- диагональная матрица,у которой на главной диагонали –собственные(характеристические) числа матрицы А.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-10) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \qquad \lambda_3 = 10$$

Собственные векторы: $\lambda_{1,2} = 1$

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 = -2x_2 + 2x_3 \end{array}$$

$$\chi_{1,2} = \begin{pmatrix} -2c_1 + 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |c_1| + |c_2| \neq 0$$

$$\lambda_3 = 10$$

$$(A-\lambda_3 E)=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4 & 1 & -1\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\sim$$

$$\chi_3=\begin{pmatrix}c\\ 2c\\ -2c\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4 & 1 & -1\\ -18 & 0 & -9\\ -18 & 0 & -9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$-2x_1+x_2=0 \qquad x_2=2x_1$$
$$2x_1+x_3=0 \qquad x_3=-2x_1$$
$$x_1=c$$

$$\chi_3=c\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix} \qquad c\neq 0$$

$$\gamma_1=(-2,1,0) \qquad \gamma_2=(2,0,1) \qquad \gamma_3=(1,2,-2)$$

ищем ортонормированную систему векторов:

$$\alpha_1=\gamma_1=(-2,1,0) \qquad \alpha_2=\gamma_2+c\alpha_1 \quad \alpha_2\perp\alpha_1$$

$$\alpha_2\alpha 1=(\gamma_2\cdot\alpha_1)+c(\alpha_1\cdot\alpha_1)=0 \qquad c=\frac{-(\gamma_2\cdot\alpha_1)}{(\alpha_1\cdot\alpha_1)}=\frac{-(-4)}{5}=\frac{4}{5}$$

$$\alpha_2=\gamma_2+c\alpha_1=(2,0,1)+\frac{4}{5}\cdot(-2,1,0)=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)$$

$$\alpha_2=\frac{1}{5}\cdot(2,4,5) \qquad \alpha_3=(1,2,-2)$$

$$|\alpha_1|=\sqrt{5} \qquad |\alpha_2|=\frac{1}{5}\cdot\sqrt{45}=\frac{3}{\sqrt{5}} \qquad |\alpha_3|=3$$

$$e_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-2,0,0)=\left(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)$$

$$e_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\left(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$e_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\frac{1}{3}\cdot(1,2,-2)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

$$C=\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \text{ - матрица, ортогональная матрице A}$$

$$CD=\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{20}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{-20}{3} \end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{20}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{-20}{3} \end{pmatrix}$$

Если надо знать не только канонический вид, но и ортогональное преобразование X=TY,приводящее форму φ к этому виду, то среди собственных векторов выбирают ортонормированный базис, что всегда осуществимо,и, располагая координаты этих векторов в столбцы, получают искомую матрицу T. Геометрически такой выбор матрицы T означает переход к новой декартовой системе координат, определяемой ортонормированным базисом собственных векторов матрицы A. Новые оси координат называют в этом случае главными осями матрицы A и соответствующей квадратичной формы φ(x).

Ортонормированный базис собственных векторов симметричной матрицы A находят так. Если λ-простой корень характеристи-ческого уравнения, то ему отвечает с точностью до множителя один собственный вектор. Множитель тогда выбирают так, чтобы этот вектор стал единичным(нормируют собственный вектор). Если λ корень кратности m, то ему соответствуют m линейно независимых собственных векторов. Подвергая их процессу ортогонализации и нормировки получают m взаимно ортогональных единичных векторов, соответствующих числу λ.Так как собственные векторы, соответствующие разным характеристическим числам, ортого-

нальны,то,собирая вместе полученные векторы, будем иметь ортонормированный базис собственных векторов.
Приведению квадратичной формы φ(x) к главным осям можно придать следующую геометрическую формулировку: в евклидовом пространстве уравнение φ(x)=C определяет некоторую поверхность второго порядка.Ортогональное преобразование X=TY, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, означает поворот декартовых координатных осей. Это помогает привести уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.

$$\lambda_1 \left(y_1\right)^2 + \lambda_2 \left(y_2\right)^2 + \ .. + \lambda_n \left(y_n\right)^2 = C$$

По виду этого уравнения легко узнать тип данной поверхности второго порядка.

1.Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\varphi(x) = (x_1)^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 + 7(x_2)2 - 8x_2x_3 + (x_3)^2$$

решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = -(\lambda - 9)^2(\lambda + 9) = 0$$

Характеристические числа матрицы A: $\lambda_{1,2} = 9 \qquad \lambda_3 = -9$

$\varphi = 9(y_1)^2 + 9(y_2)^2 - 9(y_3)^2$ - канонический вид данной квадратичной формы.
Найдем ортонормированную матрицу T, приводящую квадратичную форму к каноническому виду.
При $\lambda_{1,2} = 9$ получим собственные векторы α_1=(1,-2,0); α_2=(0,-2,1).
Находим ортогональные $\beta_1 \perp \beta_2$, векторы $\beta_1 \cdot \beta_2 = 0$. $\beta 1 = \alpha 1$,

$$\beta_2 = \alpha_1 - \frac{5}{4} \cdot \alpha_2 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{-5}{4}\right)$$

Орты этих векторов :

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

$$e_2 = \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{-5}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$\lambda = -9$$

$$\alpha_3 = (2,1,2) \qquad e_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

таким образом найдена ортонормированная система собственных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Столбцы искомой ортогональной матрицы T составлены из координат этих векторов :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad x = T \cdot Y$$

2.Найти тип и каноническое уравнение поверхности второго порядка : $x_1^2+2x_1x_2+6x_1x_3+5x_2^2+2x_2x_3+x_3^2=6$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)$$

$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 6$$

канонический вид : $-2(y_1)^2 + 3(y_2)^2 + 6(y_3)^2 = 6$ или

$\frac{(y_3)^2}{1} + \frac{(y_2)^2}{2} - \frac{(y_1)^2}{3} = 1$ - это однополостный гиперболоид с полуосями $a = 1, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{3}$.

3.$\varphi(x)=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 4 \qquad \lambda_3 = 7$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \alpha_1 = (-2, 2, 1) \qquad e_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} = \frac{1}{3}\cdot\alpha_1 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\lambda_2 = 4 \qquad \alpha_2 = (2, 1, 2) \qquad e_2 = \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} = \frac{1}{3}\cdot\alpha_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\lambda_3 = 7 \qquad \alpha_3 = (1, 2, -2) \qquad e_3 = \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|} = \frac{1}{3}\cdot\alpha_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix};$$

$$\varphi = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 + 7y_3^2$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\cdot(-2y_1 + 2y_2 + y_3) \qquad y_1 = \frac{1}{3}\cdot(-2x_1 + 2x_2 + x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\cdot(2y_1 + y_2 + 2y_3) \qquad y_2 = \frac{1}{3}\cdot(2x_1 + x_2 + 2x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\cdot(y_1 + 2y_2 - 2y_3) \qquad y_3 = \frac{1}{3}\cdot(x_1 + 2x_2 - 2x_3)$$

Здесь $T^{-1} = T$, можете проверить.

4.Привести к каноническому виду: $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-24=0$
решение: квадратичная форма: $\varphi=25x^2-14xy+25y^2$

$$A = \begin{pmatrix} 25 & -7 \\ -7 & 25 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 32 \qquad \lambda_2 = 18 \qquad \phi = 32(y_1)^2 + 18(y_2)^2$$

$1.\lambda_1 = 32$

$$\begin{pmatrix} 25-32 & -7 \\ -7 & 25-32 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -7 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \qquad 7x_1 - 7x_2 = 0 \qquad x_1 = -x_2$$

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2.\lambda_1 = 18$

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1 = x_2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

где

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-y_1 + y_2) \qquad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x - y)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (y_1 + y_2) \qquad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y)$$

$$32(y_1)^2 + 18(y_2)^2 + \frac{64}{\sqrt{2}}(-y_1 + y_2) - \frac{64}{\sqrt{2}} \cdot (y_1 + y_2) - 224 = 0$$

$$32(y_1)^2 + 18(y_2)^2 - 64\sqrt{2}y_1 - 224 = 0 \qquad \div 2$$

$$16(y_1)^2 + 9(y_2)^2 - 32\sqrt{2}y_1 - 112 = 0$$

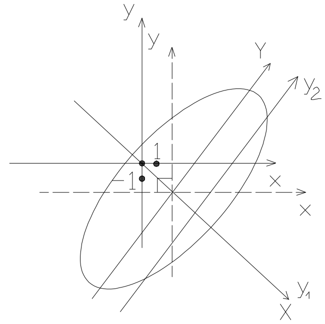
$$16\left[(y_1)^2 - 2\sqrt{2}y_1 + 2\right] + 9(y_2)^2 = 144$$

$$16(y_1 - \sqrt{2}) + 9(y_2)^2 = 144$$

$$\frac{(y_1 - \sqrt{2})^2}{9} + \frac{(y_2)^2}{16} = 1 \qquad \begin{array}{l} x = y_1 \cos(-45) - y_2 \sin(-45) \\ y = y_1 \sin(-45) + y_2 \cos(-45) \end{array}$$

$$X = y_1 - \sqrt{2} \qquad y_2 = Y$$

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{16} = 1$$



5. $3x^2+4y^2+5z^2+4xy-4yz+4x+4y+6z+4=0$

$x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z$

$3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3=\varphi$-квадратичная форма

$\lambda_1=1$; $\lambda_2=4$; $\lambda_3=7$

$\varphi=y_1^2+4y_2^2+7y_3^2$; См. Задачу 3

$$(y_1)^2+4(y_2)^2+7(y_3)^2+\frac{4}{3}\cdot(-2y_1+2y_2+y_3)+\frac{4}{3}\cdot(2y_1+y_2+2y_3)+\frac{6}{3}\cdot(y_1+2y_2-2y_3)+4=0$$

после упрощения :

$$(y_1)^2+4(y_2)^2+7(y_3)^2+2y_1+8y_2+4=0$$

$$(y_1+1)^2+4(y_2+1)^2+7(y_3)^2=1$$

$$z_1=y_1+1 \qquad z_2=y_2+1 \qquad z_3=y_3$$

$$\frac{(z_1)^2}{1}+\frac{(z_2)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{(z_3)^2}{\frac{1}{7}}=1$$

-эллипсоид

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}=(3-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+16)-2(10-2\lambda)=-\lambda^3+12\lambda^2-16\lambda-27\lambda+48-20+4\lambda=0$$

$$-\lambda^3+12\lambda^2-43\lambda+4\lambda+28=0$$

$$-\lambda^3+12\lambda^2-39\lambda+28=0$$

$$-1+12-39+28=0$$

$$\lambda_1=1 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x_1=-4x_3$

$x_2=2x_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2c \\ 2c \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1=2x_2$
$x_3=2x_2$

$$\chi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ См. Задачу 3.

6.Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду: $\varphi=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 6 \quad \lambda_3 = 9$$

ортонормированные собственные векторы :

$$e_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) \qquad e_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$e_2 = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

В базисе (e_1, e_2, e_3) квадратичная форма имеет вид :
$\phi = 3(y_1)^2 + 6(y_2)^2 + 9(y_3)^2$, а соответствующее преобразование координат :

$$x_1 = \frac{1}{3} \cdot (2y_1 - y_2 + 2y_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \cdot (2y_1 + 2y_2 - y_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{3} \cdot (-y_1 + 2y_2 + 2y_3)$$

7.Написать каноническое уравнение кривой второго порядка $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$. Определить её тип и найти каноническую систему координат .

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 8 \qquad \lambda_2 = -2 \qquad e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(x^1 + y^1\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(x^1 - y^1\right) \longrightarrow 8\left(x^1\right)^2 - 2\left(y^1\right)^2 - \frac{16}{\sqrt{2}} \cdot x^1 + \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot y^1 - 13 = 0$$

$$8\left(x^1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4 - 2\left(y^1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 9 - 13 = 0$$

$$8\left(x^1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(y^1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8 = 0$$

$$x^{11} = x^1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y^{11} = y^1 - \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$8\left(x^{11}\right)^2 - 2\left(y^{11}\right)^2 = 8$$

$$\left(x^{11}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(y^{11}\right)^2 = 1$$

-гипербола

результирующее преобразование координат:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(x^{11} + y^{11}\right) + 2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(x^{11} - y^{11}\right) - 1$$

$O'(e_1,e_2)$, где $O'(2,-1)$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{j} \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{j}$$

.

8.Каноническое уравнение поверхности второго порядка.
$4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4zx-16x-16y-8z+72=0$
определить её тип и найти каноническую систему координат:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad \lambda_1 = 9 \qquad \lambda_2 = 9 \qquad \lambda_3 = 0$$

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad e_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{-4}{3\sqrt{2}}\right) \qquad e_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot \left(3x^1 + y^1 + 2\sqrt{2} \cdot z^1\right)$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot \left(-3x^1 + y^1 + 2\sqrt{2} \cdot z^1\right)$$

$$9\left(x^1\right)^2 - 9\left(y^1\right)^2 - 72z^1 + 72 = 0$$

$$z = \frac{1}{3} \cdot \left(-4y^1 + \sqrt{2}z^1\right)$$

$$\| \longrightarrow x^{11} = x^1 \qquad y^{11} = y^1 \qquad z^{11} = z^1 - 1$$

$$\frac{\left(x^{11}\right)^2}{8} - \frac{\left(y^{11}\right)^2}{8} = z^{11}$$

- гиперболический параболоид

результат преобразования координат:

$$x = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \left(3x^{11} + y^{11} + 2\sqrt{2}z^{11}\right) + \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \left(-3x^{11} + y^{11} + 2\sqrt{2}z^{11}\right) + \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \left(-4y^{11} + \sqrt{2}z^{11}\right) + \frac{1}{3}$$