Diferentsiaalvõrrandid

S. Babitšenko

YMR0010 2,5AP
2-0-1

TTÜ
Tallinn

Введение

Метод построения математических моделей является наиболее эффективным методом изучения различных явлений природы. В большинстве случаев не удаётся установить формулу прямой зависимости между собой различных характеристик рассматриваемого физического, биологического, химического, экономического или какого-нибудь другого динамического процесса. Однако часто удаётся составить определённую функциональную зависимость между неизвестными характеристиками рассматриваемого процесса, скоростями их изменения и временем, т. е. найти уравнения, содержащие производные неизвестных характеристик процесса. В таком случае говорят, что математической моделью процесса является дифференциальное уравнение.
Опыт показывает, что разные по содержанию задачи могут приводить к одинаковым дифференциальным уравнениям. Использование дифференциальных уравнений в качестве модели некоторого процесса в природе удобно в том смысле, что эти уравнения описывают эволюцию процесса во времени и характер возможных изменений процесса в зависимости от его первоначального состояния.
Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция является функцией одной независимой переменной, то уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных. Считая x независимой переменной и $y = y(x)$ - неизвестной функцией, обыкновенное дифференциальное уравнение в общем случае можно записать в виде соотношения $F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0$, где F – заданная функция своих аргументов. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком обыкновенного дифференциального уравнения.
Если дифференциальное уравнение разрешимо, то оно имеет, как правило, бесчисленное множество решений. Поэтому, решив дифференциальное уравнение, описывающее некоторый процесс во времени, нельзя ещё указать однозначно зависимость от времени характеристики процесса, удовлетворяющей этому уравнению. Нужны дополнительные условия. На практике чаще всего в качестве дополнительных условий выступают некоторые начальные условия или граничные условия.
Для практических приложений дифференциальных уравнений очень важен вопрос о характере зависимости решения дифференциального уравнения от вида функции F и от дополнительных условий (начальных или граничных) при их малом изменении. Ведь в прикладных задачах и само дифференциальное уравнение и дополнительные условия неизбежно определяются с некоторой погрешностью, так как при их составлении всегда приходится пренебрегать несущественными для рассматриваемого процесса факторами. Для практики целесообразны только такие дифференциальные уравнения и дополнительные условия, при малом изменении которых мало изменяется определяемое ими решение. Другими словами, должна быть непрерывная зависимость решения рассматриваемой задачи от исходных данных.

Из сказанного ясно, что одними из главных вопросов теории дифференциальных уравнений являются вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от исходных данных решения дифференциального уравнения при заданных дополнительных условиях. Кроме этих вопросов, теория дифференциальных уравнений изучает качественные свойства и методы решения дифференциальных уравнений различных типов и некоторые другие вопросы. Лишь для сравнительно небольшого числа дифференциальных уравнений решение можно записать в виде некоторой формулы. Поэтому, наряду с методами нахождения точных решений, в теории дифференциальных уравнений важное значение имеют методы построения приближённых решений дифференциальных уравнений: численные методы решения и асимптотические методы решения. Численным и асимптотическим методом решения уравнений в данном изложении уделяется мало внимания из-за естественного ограничения количества часов в лекционном курсе.

Лекция 1

$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ - дифференциальное уравнение $n -$го порядка, связывающее неизвестную функцию y, аргумент x и производные функции.
Изучение физического процесса:

- Создание физической гипотезы, основанной на эксперименте;
- Математическая форма записи физической гипотезы;
- Математическое решение этой задачи;
- Физическое толкование выводов из её решения.

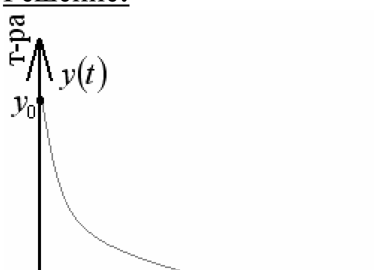
Галилей 16-17 в. предложил, Ньютон применил.

<u>Пример 1</u>**.** Тело (мет. пластина), нагретое до температуры y_0, в момент времени $t = 0$ погружается в термостат с температурой $0°$.
$y(t) -$ изменение температуры от времени.
По закону охлаждения Ньютона скорость изменения температуры пропорциональна самой температуре.

(1) $\dfrac{dy}{dt} = -ky$ $\quad k -$коэффициент теплопроводности тела. «минус» обозначает убывание температуры.
Соотношение (1) в виде дифференциального уравнения является математической записью закона охлаждения – <u>математическая модель рассмотренного процесса.</u>

Решить дифференциальное уравнение – значит найти все функции $y(t)$, обращающие уравнение (1) в тождество.

<u>Решение</u>**:**



$$\int \frac{dy}{y} = \int -k \cdot dt + C_1$$

$$\ln|y| = -kt + C_1$$

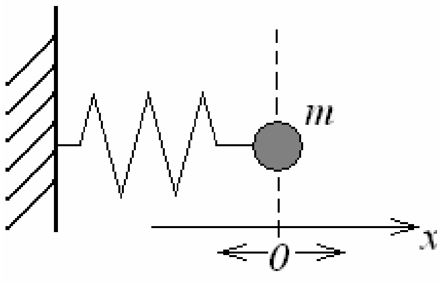
$$y = e^{-kt+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-kt}, \; e^{C_1} = C$$

(2) $\quad y = C \cdot e^{-kt}$ - общее решение дифференциального уравнения (1), C – произвольная постоянная.

Подставляя в (2) начальное условие: при $t = 0$ $y = y_0$, получим $C = y_0$.
$y(t) = y_0 \cdot e^{-kt}$ - закон охлаждения (<u>частное решение</u>).
Начальное условие $y(0) = y_0$ позволяет из бесконечного множества решений выбрать единственное.

Уравнение (1) описывает и другие явления и процессы: например <u>падение атмосферного давления</u> в зависимости от высоты на уровнем моря пропорционально величине давления, <u>радиоактивный распад</u>: скорость уменьшения массы радиоактивного вещества пропорциональна количеству этого вещества.

<u>Пример 2</u>**.** (школьный)



Шарик на пружине, закон Гука.
$F = -kx$
$k - const$, характеристика упругости пружины.

По 2-му закону Ньютона $F = ma$, $a -$ ускорение.

$x(t) -$ положение шарика в момент времени t,
тогда $x''_t = a$

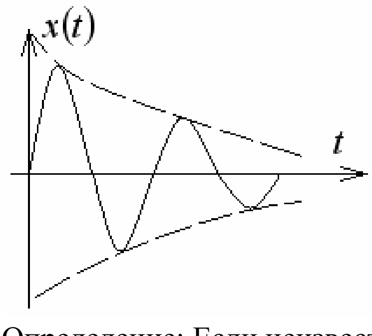
$$mx''_t = -k \cdot x(t)$$

(3) $\qquad x''_t + \omega^2 \cdot x = 0$, где $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

(3) – дифференциальное уравнение гармонических колебаний (2-го порядка)
Любое решение уравнения (3) может быть записано в виде $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$;
где $A, \varphi - const$, произвольные постоянные.
Движение, описанное (3) уравнением – гармоническое колебание – периодическое движение с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $A -$ амплитуда колебаний.
Начальные условия: 1) x_0 в момент t_0 - начальное смещение
2) $\upsilon_0 = x'(0) -$ начальная скорость (с какой шар отпущен).
Если $\upsilon_0 = 0$, то $x(t) = x_0 \cos \omega t$
(3) – математическая модель закона движения под действием только силы упругости.

(4) $\qquad mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$ - с учётом силы сопротивления пропорциональной скорости движения.

Решение (4) – затухающие колебания с изменяющейся амплитудой.



<u>Определение</u>: Если неизвестная функция зависит от одной переменной x, то дифференциальное уравнение называется <u>обыкновенным</u>.

<u>Определение</u>: <u>Порядком дифференциального</u> уравнения называется порядок старшей производной, входящей в него.
(1) – первого порядка, (3), (4) – второго порядка.

<u>Определение</u>: Если неизвестная функция зависит от <u>нескольких переменных</u>, то дифференциальное уравнение содержит частные производные функции по этим переменным и называется <u>дифференциальным уравнением с частными производными</u>.
Такими уравнениями описывают, например колебание мембраны, распространение тепла в некоторой среде, движение спутника и др.

Итак: $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$ - дифференциальное уравнение первого порядка.
Начальное условие $y|_{x=x0} = y_0$

I. Существование решений

Для корректности постановки начальной или краевой задачи требуется доказательство существования решения, указывающее иногда и путь его построения. Существование физического явления, описываемого данным дифференциальным уравнением, может лишь подсказать но <u>не</u> доказать существование решения; доказательство существования проверяет <u>состоятельность математической модели</u>. Правильно построенная математическая модель должна допускать решения в виде непрерывных функций от параметров, начальных значений и т. п.

Существование и единственность решений

Дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

(*) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ имеет решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, если $f(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).
Точнее:
Если $f(x, y)$ непрерывна в открытой области D и удовлетворяет в этой области условию Липшица

$$|f(x, y) - f(x, \eta)| \leq M \cdot |y - \eta|,$$

где $M > 0 - const$, то дифференциальное уравнение (*) при любом начальном условии $y(x_0) = y_0$, где точка $(x_0, y_0) \in D$, имеет единственное решение. Каждое решение может быть продолжено до границы области D.
Геом: через каждую точку области D проходит единственная интегральная кривая.

$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n.
$x -$ независимая переменная
$y(x) -$ искомая функция
$y', ..., y^{(n)} -$ её производные
Решения могут быть проверены подстановкой в уравнение.
Общее решение - $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, где $C_1, C_2, ..., C_n -$ произвольные постоянные.

<u>В задаче Коши (начальной задаче)</u> требуется найти частное решение, удовлетворяющее n начальным условиям:

Нач. усл. $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ по которым определяются n постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.
<u>В краевой задаче</u> на $y(x)$ и её производные накладываются n <u>краевых условий</u> в точках $x = a$ и $x = b$.

График каждого частного решения называется <u>интегральной кривой</u>; совокупность n графиков образует n-параметрическое семейство интегральных кривых.

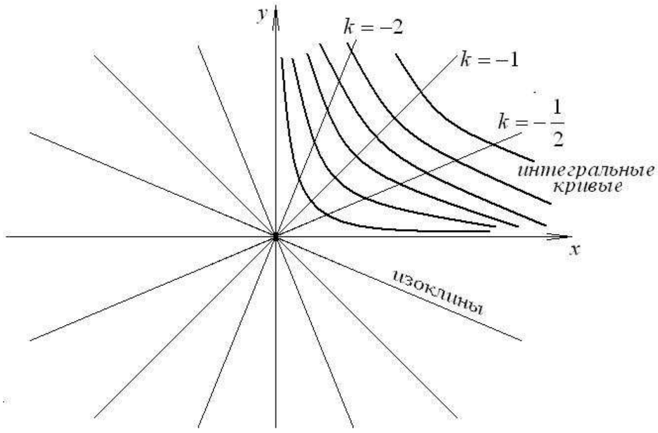
$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ – дифференциальное уравнение 1-го порядка описывает <u>поле направлений</u> или <u>поле линейных элементов</u> проходящих через точку (x, y) с угловым коэффициентом $p = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Каждый линейный элемент <u>касателен к некоторой интегральной кривой</u>.

$$y = y(x, \lambda) \text{ или } \varphi(x, y, \lambda) = 0$$

<u>Поле направлений</u> позволяет приближённо графически построить интегральные кривые. При построении интегральных кривых могут оказаться полезными <u>изоклины</u> $F(x, y, p_1)$ или $f(x, y) = p_1$ на которых интегральные кривые имеют фиксированный угловой коэффициент p_1.

Общее решение: $y = \varphi(x, C)$
Общий интеграл: $\Phi(x, y, C) = 0$
Частное решение: $y = \varphi(x, C_0)$
Частный интеграл: $\Phi(x, y, C_0) = 0$

<u>Геометрическая интерпретация</u>



$\Phi(x, y, C) = 0$ – семейство кривых, интегральные кривые.

(5) $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ – уравнение (5) в каждой точке кривой $y = \varphi(x)$ задаёт значение производной, т.е. значение тангенса угла наклона касательной к интегральной кривой, т.е. уравнение определяет поле направлений на плоскости Oxy (изображается единичными векторами).

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} = k$ – определяет геометрическое место точек (.), называемое изоклинами дифференциального уравнения. ($y = -kx$, при различных k)

<u>Изоклины</u>
Каждая изоклина соответствует фиксированному наклону интегральной кривой. Если заданные начальные условия $y = y_0$ при $x = x_0$, то решению соответствует 1 интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0).
<u>Определение.</u> Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется <u>интегрированием</u> дифференциального уравнения.
<u>Пример</u>.
(6) $\quad y' = 2\sqrt{y}, y \geq 0$
Общее решение: $\quad y = (x + C)^2$
Частное решение: $\quad y = (x + 1)^2$
! но $y = 0$ – тоже решение уравнения (6) и получить его из общего невозможно ни при каком частном значении постоянной *C*.

<u>Определение</u>. Решение, которое невозможно получить из общего при частном значении постоянной *C*, называется <u>особым решением</u>.

<u>Определение</u>. <u>Решение задачи Коши</u> – решение $y = \varphi(x)$ уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, обладающее свойством $y_0 = \varphi(x_0)$, где x_0, y_0 называются начальными значениями. Здесь предполагается, что в (.) (x_0, y_0), $\frac{dy}{dx}$ или $f(x, y)$ в уравнении определено.

В задаче Коши требуется найти решение $y = \varphi(x)$, которое проходило бы через заданную (.) (x_0, y_0), в которой $f(x, y)$ определено.

При изучении уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ можно ставить следующие общие задачи:

1. найти все решения
2. найти решения, обладающие тем или иным свойством (например ограниченные при всех x или периодические).
3. <u>доказать, что существует решение, обладающее каким-нибудь свойством, если нельзя его найти</u>.

Дифференциальное уравнение (5) может быть записано в разных видах:

$$dy = f(x, y)dx$$
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \text{ или}$$

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f(x,y)}=f_1(x,y)$ Здесь x – неизвестная функция, y – независимая переменная.

II. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными

(1) $M_1(x)\cdot M_2(y)dx+N_1(x)\cdot N_2(y)dy=0$ $\quad :[M_2(y)\cdot N_1(x)]$

(2) $\dfrac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\dfrac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0$ – уравнение с разделенными переменными.

При переходе предполагается, что $M_2(y)\cdot N_1(x)\neq 0$.

Если же $M_2(y)=0$ и $N_1(x)=0$ при $y=b$ и $x=a$, то $y=b$ и $x=a$ являются решениями уравнения (1).

Интегрируя (2) получаем $\displaystyle\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=C$,

Где C – произвольная постоянная. Решение в виде <u>общего интеграла</u>.

<u>Пример</u>: $(1+x)y\cdot dx+(1-y)x\cdot dy=0$

$$\frac{(1+x)}{x}dx+\frac{(1-y)}{y}dy=0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int dx+\int\frac{dy}{y}-\int dy=C$$

$\ln|xy|+x-y=C$ – решение в виде общего интеграла

Особые решения: $x=0, y=0$.

III. Однородные уравнения 1-го порядка

Функция $F(x,y)$ называется однородной степени *m*, если

(1) $F(tx,ty)=t^m\cdot F(x,y)$

Полагая здесь $t=\dfrac{1}{x}$, получим

(2) $x^m\cdot F\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=F(x,y)$

Дифференциальное уравнение называется <u>однородным</u>, если оно имеет вид:

(3) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, где

$M(x,y)$ и $N(x,y)$ – функции однородные степени *m*.

На основании свойства (2) уравнение (3) можно записать в виде

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\Phi\left(\dfrac{y}{x}\right),\quad \Phi(u)=-\dfrac{M(1,u)}{N(1,u)}$

<u>Однородное</u> уравнение <u>приводится</u> к уравнению с разделяющимися переменными <u>подстановкой</u>.

(5) $u=\frac{y}{x}$, $y=ux$. Подставляя в (4), получим:

$$dy=udx+xdu$$

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}\Bigg\| \to x\frac{du}{dx}+u=\Phi(u)\to$$

(6) $xdu=(\Phi(u)-u)dx$ - уравнение с разделяющимися переменными

<u>Пример</u>: $y'=\frac{xy}{x^2-y^2}$ - однородное уравнение

(7) $$y'=\frac{\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{dy}{dx}$$

Подстановка: $u=\frac{y}{x}$ $\quad y=ux \quad dy=udx+xdu \quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

Подставим в (7):

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}$$

$$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}-u=\frac{u-u+u^3}{1-u^2}=\frac{u^3}{1-u^2}$$

$$\frac{1-u^2}{u^3}du=\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du=\int\frac{dx}{x}+\ln|C|$$

$$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+\underbrace{\ln|C|}_{const}$$

$$-\frac{1}{2u^2}=\ln|u\cdot x\cdot C|, \qquad u=\frac{y}{x}$$

Ответ в виде общего интеграла: $-\frac{x^2}{2y^2}=\ln|y\cdot C|$

IV. Уравнения 1-го порядка, приводящиеся к однородным

(1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),$$ $f-\forall$ непрерывная функция

Замена переменных: $x=x_1+h$ $y=y_1+k$

Тогда: $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}$$

Подставляя в (1), получаем

(2) $$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+\overbrace{ah+bk+c}^{=0}}{a_1x_1+b_1y_1+\underbrace{a_1h+b_1k+c_1}_{=0}}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$$

const h и k ищем из системы: $$\begin{cases}ah+bk+c=0\\ a_1h+b_1k+c_1=0\end{cases}$$

тем самым приводим уравнение (1) к виду (2), т.е. к однородному уравнению.

(2) решаем подстановкой $u=\dfrac{y_1}{x_1}$ и т.д.

!!! Если $\begin{vmatrix}a & b\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}=0$, то система не имеет решения. Тогда уравнение (1) преобразуется к виду: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$. Подстановка $z=ax+by$ и уравнение (1) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

V. Линейные уравнения 1-го порядка

(1) $\dfrac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)-$ уравнение линейное, относительно y и y'

Решение линейного уравнения:

Замена: $y=u(x)\cdot v(x)$

$$\frac{dy}{dx}=u(x)\frac{dv}{dx}+v(x)\frac{du}{dx}$$

Подставляя в (1), получаем: $$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+P(x)\cdot u(x)\cdot v(x)=Q(x)$$

Группируем: $$\underbrace{u\left(\frac{dv}{dx}+P\cdot v\right)}_{=0}+v\frac{du}{dx}=Q$$

Выбирем $v(x)$ из условия $\dfrac{dv}{dx}+P\cdot v=0$:

$$\begin{cases} \overbrace{\dfrac{dv}{dx} + P \cdot v = 0}^{(2)} \\ \underbrace{v\dfrac{du}{dx} = Q}_{(3)} \end{cases}$$

Решаем (2): $\dfrac{dv}{dx} = -P \cdot v \qquad \dfrac{dv}{v} = -P \cdot dx$

$\ln|v| = -\int P dx \qquad$ (без C)

$v(x) = e^{-\int P dx}$

(3) $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{Q(x)}{V(x)}$

$u = \int \dfrac{Q(x)}{v(x)} dx + C$

Общее решение: $y = v(x) \cdot \left[\int \dfrac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right]$

<u>Пример</u>: $y' - \underbrace{\dfrac{2}{x+1}}_{P(x)} y = \underbrace{(x+1)^3}_{Q(x)}$

Решение: $y = u \cdot v$

$\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx} - \dfrac{2 \cdot u \cdot v}{x+1} = (x+1)^3$

$u\underbrace{\left(\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{2 \cdot v}{x+1}\right)}_{=0} + v\dfrac{du}{dx} = (x+1)^3$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2 \cdot v}{x+1} \\ v\dfrac{du}{dx} = (x+1)^3 \end{cases}\right\| \to \begin{cases} \dfrac{dv}{v} = \dfrac{2dx}{x+1}; \ln|v| = 2\ln|x+1|; v = (x+1)^2 \\ (x+1)^2 \cdot \dfrac{du}{dx} = (x+1)^3; \dfrac{du}{dx} = x+1 \end{cases}$$

$du = (x+1)dx$

$u = \int (x+1)dx = \dfrac{(x+1)^2}{2} + C$

Общее решение: $y = u \cdot v = \dfrac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$

VI. Уравнение Бернулли

(1) $\dfrac{dy}{dx}+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot y^n \qquad (n\neq 0, n\neq 1)$

Также, как линейное уравнение, уравнение Бернулли можно проинтегрировать с помощью подстановки: $y=u\cdot v$ или свести к линейному уравнению делением на y^n и подстановкой $z=y^{1-n}$.

<u>Пример</u>: $\dfrac{dy}{dx}+xy=x^3\cdot y^3$

Делим на y^3: $y^{-3}\cdot\dfrac{dy}{dx}+xy^{-2}=x^3$

$$z=y^{-2}$$

$$\frac{dz}{dx}=-2\cdot y^{-3}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{dz}{dx}+xz=x^3$$

$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$$

Полученное уравнение – линейное первого порядка.

Л.2.

I. Дифференциальные уравнения, содержащие дифференциалы произведения и частного

$$d(x,y)=xdy+ydx \qquad d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

$$\text{замена}:[u=xy] \qquad \left[u=\frac{y}{x}\right]$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}\Rightarrow\left[u=\frac{x}{y}\right]$$

Пример :

$$y^2xdy-y^3dx=x^2dy \qquad :(x^2)$$

$$\frac{y^2xdy-y^3dx}{x^2}=dy$$

$$y^2\cdot\frac{xdy-ydx}{x^2}=dy\Rightarrow y^2\cdot d\left(\frac{y}{x}\right)=dy \qquad \left[u=\frac{y}{x}\right]$$

$$y^2\cdot du=dy$$

$$du=\frac{dy}{y^2}$$

$$\int du = \int \frac{dy}{y^2} + C; \qquad \left[u = -\frac{1}{y} + C \right]$$

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{y} = C; \qquad y^2 = Cxy - x$$

$(.)xy$ Ответ: $y^2 = x(Cy - 1)$

II. Уравнение Риккати

(1) $y' = p(x) + q(x) \cdot y + r(x) \cdot y^2$

Определение: Дифференциальные уравнения, интегрируемые при помощи конечного числа интегралов или других элементарных операций, называются интегрируемыми в квадратурах или в конечном виде.

Уравнение Риккати (1) при произвольном выборе функций $p(x), q(x), r(x)$ не интегрируется в конечном виде.
Укажем несколько частных случаев уравнения (1), когда решение получается в конечном виде.

1. p, q и r в уравнении (1) – постоянные ($const$) $\Rightarrow$ (1) – уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{p + qy + ry^2} = dx \text{ и т.д.}$$

2. $r = \dfrac{A}{x^2}$; $q = \dfrac{B}{x}$;

$A, B, p - const \Rightarrow$ уравнение (1) - однородное.

$$y' = p + A \cdot \frac{y}{x} + B\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Подстановка $\left[u = \dfrac{y}{x} \right]$ и т.д.

3. $p = \dfrac{A}{x^2}$; $q = \dfrac{B}{x}$;

$A, B, r - const$

Подставив $[u = xy]$, для определения u получим уравнение с разделяющимися переменными $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x}\left[A + (B+1)u + r \cdot u^2\right]$

Хорошо изучено уравнение Риккати вида:

$$y' + ay^2 = bx^\alpha,$$

где a, b и $\alpha - const$. Указана бесконечная последовательность значений α, при которых это уравнение разрешимо в квадратурах. Доказано, что в остальных случаях оно не интегрируется в квадратурах.

Замечание: Если известно одно частное решение $y = y_1$ уравнения (1), то общее решение получим, введя новую $y = y_1 + u$. Подставляя в (1), и учитывая, что y_1 – решение уравнения (1), получаем для u уравнение:

$$u' = (q + 2r \cdot y_1)u + r \cdot u^2$$ - уравнение Бернулли

Полагая $z = u^{-1}$, для z получим линейное уравнение и т.д.

III. Дифференциальные уравнения 1-го порядка в полных дифференциалах

(1) $\quad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Уравнение (1) называется уравнением в полных дифференциалах, если $\exists$ такая функция $u(x,y)$, что

(2) $\quad du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$

Тогда (3) $\quad du(x,y) = 0 \Rightarrow$

(4) $\quad u(x,y) = C -$ общее решение

Как узнать, что уравнение (1) является уравнением в полных дифференциалах?

Т: Пусть функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$- непрерывные вместе с производными $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ и пусть $M^2(x,y)dx + N^2(x,y)dy \neq 0$ в некоторой области $D(x,y)$.

Покажем, что H и D условием $\exists$ функции $u(x,y)$, удовлетворяющей (2), является равенство:

(5) $$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Д: Необходимость: Если уравнение (2) в полных дифференциалах, то $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$ отсюда $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ в силу непрерывности $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ вторые смешанные производные здесь равны, откуда и следует (5).

Достаточность: доказательство не приводится, т.к. сложное.

Пример 1. $$\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

(5) выполнено на всей плоскости Oxy кроме (.) $(0,0)$.

$$u(x,y) = arctg\frac{y}{x} = C$$

$y = x \cdot tgC$ или $y = x \cdot C_1$

Пример 2. $\quad (x + y^2)dy + (x + y)dx = 0$

Условие (5) выполнено. Решить самостоятельно, полагая $x_0 = y_0 = 0$

Ответ: $\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^3}{3}=0$

IV. Интегрирующий множитель

Если равенство (5) для уравнения (1) в III не выполнено, то умножим уравнение (III. 1) на функцию $\mu=\mu(x,y)$:

(1) $\mu\cdot Mdx+\mu\cdot Ndy=0$

Выберем μ так, чтобы для уравнения (IV. 1) условие (III. 5) выполнялось:

(2) $\frac{\partial\mu M}{\partial y}=\frac{\partial\mu N}{\partial x}$

Функция μ называется интегрирующим множителем. Для определения μ получаем дифференциальное уравнение в частных производных:

(3) $\frac{\partial\mu}{\partial y}M-\frac{\partial\mu}{\partial x}N=\mu\cdot\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]$

Будем искать μ в виде:

(4) $\mu=\varphi(\omega(x,y))$,

где $\omega(x,y)$ – произвольно выбранная, определённая функция, а $\varphi(z)$ – подлежащая определению.

Подставляя (4) в (3) получим:

$$M\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}-N\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}=\mu\cdot\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right] \text{ или}$$

(5) $$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M\frac{\partial\omega}{\partial y}-N\frac{\partial\omega}{\partial x}}=\frac{\frac{d\mu(\omega)}{d\omega}}{\mu(\omega)}$$

Если левая часть здесь окажется функцией от $\omega(x,y)$, то

(6) $\frac{d\mu}{d\omega}=\mu\cdot\Psi(\omega)\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=\Psi(\omega)d\omega$

$\ln|\mu|=\int\Psi(\omega)d\omega$

(7) $\mu=e^{\int\Psi(\omega)d\omega}$

Если возьмём, например $\mu=\varphi(x+y)$, т.е. $\omega=x+y$, то равенство (5) принимает вид:

(8) $$\frac{\frac{d\mu}{d\omega}}{\mu}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M-N}$$

Если здесь правая часть будет функцией от $(x+y)$, то μ будет найдено.

Пример 1. $1\cdot dx+\left(1+e^{-x}\cdot y\right)dy=0$

$M=1;\qquad N=1+e^{-x}\cdot y$

Это уравнение не в полных дифференциалах, т.к. условие (III. 5) не выполнено.
Будем искать $\mu = \varphi(x+y)$, т.е. полагаем $\omega = x+y$, тогда (8) имеет вид:

$$\frac{\frac{d\mu}{d\omega}}{\mu} = 1; \qquad \mu = e^{x+y}$$

Замечание: можно для уравнения (IV. 1) μ искать в виде $\mu = \varphi(x)$, т.е. $\omega = x$ или $\mu = \varphi(y)$, т.е. $\omega = y$.

В первом случае μ будет найдено, если согласно (5) $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \Psi(x)$

Во втором должно быть: $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \Psi(y)$.

<u>Замечание</u>: Из $\mu \cdot Mdx + \mu \cdot Ndy = du$ получаем $Mdx + Ndy = \dfrac{1}{\mu}du = 0$. Тогда

решения определяются из $\begin{cases} du = 0 \Rightarrow u(x,y) = C \\ \dfrac{1}{\mu} = 0 \Rightarrow \mu = \infty \end{cases}$

<u>Пример 2</u>. $\quad dy - 2\sqrt{y}dx = 0$

Условие (III. 5) не выполнено.

$\mu = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$; $\dfrac{dy}{2\sqrt{y}} - dx = 0; u = \sqrt{y} - x = C$

Из $\dfrac{1}{2\sqrt{y}} = \mu = \infty$ имеем $y = 0 -$ это особое решение.

<u>Пример 3</u>. $\quad dy + xy \cdot dx = 0$

Условие (III. 5) не выполнено.

$\mu = \dfrac{1}{y}; \dfrac{dy}{y} + xdx = 0; u = \dfrac{x^2}{2} + \ln y = C$

Из $\mu = \dfrac{1}{y} = \infty$, имеем $y = 0 -$ это решение неособое, т.к. получено из общего формально при $C = -\infty$.

Если общее решение представить в виде $y = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, то $y = 0$ при $C = 0$.

<u>Теорема</u>: Если уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (*) в области $D(x,y)$, где $M^2 + N^2 \neq 0$, имеет дифференцируемый (по *x* и *y*) интеграл $u(x,y)$, то это уравнение имеет *и* интегрирующий множитель.

Доказательство:

Имеем: $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\equiv 0$. Из (*) $\frac{\partial u}{\partial x}N(x,y)-\frac{\partial u}{\partial y}M(x,y)\equiv 0$.

Отсюда: $\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M}=\mu(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\mu\cdot N;\frac{\partial u}{\partial x}=\mu\cdot M$$

Поэтому: $\mu\cdot(Mdx+Ndy)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\equiv du$, что и требовалось доказать.

Пример 1. $\underbrace{3x^2e^y}_{M(x,y)}dx+\underbrace{(x^3e^y-1)}_{N(x,y)}dy=0$

Проверим $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$?

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2e^y;\ \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2e^y;$$

$$\Rightarrow du=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2e^y\Rightarrow u=x^3e^y+C(y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^3e^y-1\Rightarrow u=x^3e^y-y+\underbrace{C(x)}_{=0}\end{cases}$$

$$C(y)=-y$$

$$d(x^3e^y-y)=0$$
$$x^3e^y-y=C$$

Пример 2. $\underbrace{e^{-y}}_{M}dx+\underbrace{(1-x\cdot e^{-y})}_{N}dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-e^{-y};\ \frac{\partial N}{\partial x}=-e^{-y};\Rightarrow du=0$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=+e^{-y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=1-x\cdot e^{-y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=e^{-y}\cdot x+C(y)\\ u=y+x\cdot e^{-y}+C(x)\end{cases}$$

$$C(y)=y$$

$d(y+x\cdot e^{-y})=0\qquad y=C-x\cdot e^{-y}$

Пример 3. $\underbrace{2x\cdot tgy}_{M}\cdot dx+\underbrace{(x^2-2\sin y)}_{N}\cdot dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{2x}{\cos^2 y};\ \frac{\partial N}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

1) $$\frac{\frac{2x}{\cos^2 y}-2x}{x^2-2\sin y}=\frac{2x\left(1-\cos^2 y\right)}{\cos^2 y\left(x^2-2\sin y\right)}=\frac{2x\cdot tg^2 y}{x^2-2\sin y}$$

2) $$\frac{2x-\frac{2x}{\cos^2 y}}{2x\cdot tgy}=\frac{-2x\cdot\sin^2 y}{\cos^2 y\cdot 2x\cdot tgy}=\frac{-2x\cdot tg^2 y}{2x\cdot tgy}=-tgy=\Psi(y)=\ln\mu=-\int tgy\cdot dy=$$

$$=-\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=\int\frac{d(\cos y)}{\cos y}=\ln|\cos y|$$

$\mu=\cos y-$ интегрирующий множитель.

$$\underbrace{2x\cdot\sin y}_{\frac{\partial u}{\partial x}}\cdot dx+\underbrace{\left(x^2\cos y-\sin 2y\right)}_{\frac{\partial u}{\partial y}}dy=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\cdot\sin y\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2\cdot\cos y-\sin 2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=x^2\sin y+C(y)\\ u=x^2\sin y+\dfrac{1}{2}\cos 2y+C(x)\end{cases}$$

Ответ: $x^2\sin y+\frac{1}{2}\cos 2y=C$

Л.3

I. Дифференциальные уравнения 1 порядка, не разрешённые относительно производной

$F(x,y,y')=0$, если это уравнение содержит $(y')^2$, имеет 2 решения относительно y': $y'=f_1(x,y); y'=f_2(x,y)$ и геометрически определяет в $\forall(x_0,y_0)$ два направления интегральных кривых.

Такие дифференциальные уравнения кроме общего интеграла $\Phi(x,y,C)=0$ и частных интегралов иногда имеют ещё <u>особый интеграл, не содержащий произв. пост. *C*</u> и не получаемый из общего ни при каком значении *C*.

Особый интеграл, если он $\exists$, можно получить исключив $p=y'$ из уравнений $F(x,y,p)=0$ и $F'_p(x,y,p)=0$

или же, исключив *C* из общего интеграла.

$$\begin{cases}\Phi(x,y,C)=0\\ \Phi'_C=0\end{cases}$$

<u>Геометрически особый интеграл определяет огибающую семейства интегральных кривых</u>.

<u>Пример 1</u>. $(y')^2-2xy'=0$

$y' = 0 \qquad\qquad y' = 2x$

Общий интеграл: $\quad y = C; \; y - x^2 = C$ или $(y - C)(y - x^2 - C) = 0$

Область D - вся плоскость; через каждую (.) (x_0, y_0) проходят две интегральные кривые: $y = y_0$, $y = x^2 + y_0 - x_0^2$

Частные случаи:

1. $F(y') = 0$

$y' = a_k \qquad (k = 1,2,...)$, где $a_k - const$

$y = a_k x + C \qquad (k = 1,2,...)$ это и есть общее решение

$$a_k = \frac{y - C}{x}$$

Подставляя в 1), получим общее решение в виде $F\left(\dfrac{y - C}{x}\right) = 0$

2. $F(x, y') = 0$

Если найдём $y' = f_k(x); \qquad (k = 1,2,...)$, то общее решение в виде $y = \int f_k(x)dx + C$.

Иногда удаётся дифференциальное уравнение 2) представить в параметрическом виде, т.е. найти такие функции $x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t)$, что $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$.

В этом случае общее решение можно найти следующим образом:

$$dy = y'dx = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt$$

Отсюда получим общее решение:

(1) $\quad \begin{cases} y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C \\ x = \varphi(t) \end{cases}$

Из которого получим и решение задачи Коши, определяя при $x = x_0$ значение $t = t_0$ из уравнения $x_0 = \varphi(t_0)$, а затем при $y = y_0$ и $t = t_0$, значение C из первого равенства в 1).

3. $F(x, y, y') = 0$

Предположим, что можно найти функции

(2) $\quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad y' = \chi(u, v)$, которые удовлетворяют уравнению 3.

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \equiv 0$$

В этом случае интегрирование уравнения 3. сводится к интегрированию уравнения, разрешаемого относительно производной.

Из (2) $\quad dx = \varphi'_u \cdot du + \varphi'_v \cdot dv$

$$dy = \psi'_u \cdot du + \psi'_v \cdot dv$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'_u + \psi'_v \cdot \dfrac{dv}{du}}{\varphi'_u + \varphi'_v \cdot \dfrac{dv}{du}} = \chi(u, v)$$

Отсюда найдём:

(3) $\qquad \dfrac{dv}{du} = \Phi(u,v)$

Далее пусть $v = p(u,c)$ – общее решение уравнения (3), тогда общее решение уравнения 3. имеем в виде:

$$x = \varphi(u, p(u,c))$$
$$y = \psi(u, p(u,c))$$

Если $v = q(u)$ – особое решение уравнения (3), то получим ещё решение:

$$x = \varphi(u, q(u))$$
$$y = \psi(u, q(u)),$$

которое может оказаться особым.

<u>Частные случаи уравнения</u> $F(x, y, y') = 0$

I. $x = F(y, y')$

Здесь можно полагать $y = u, y' = v, x = F(u,v)$, что является частным случаем (2).

II. $y = F(x, y')$

Тогда имеем $x = u, y' = v, x = F(u,v)$.

III. $y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y')$

Уравнение Лагранжа (частный случай уравнения II).

IV. $y = xy' + \varphi(y')$

Уравнение Клеро (частный случай уравнения III).

Обозначим $y' = p \Rightarrow y = px + \varphi(p)$.

Оно имеет общий интеграл $y = Cx + \varphi(C)$ и <u>особый</u>, получающийся исключением параметра p из уравнений:

$$\begin{cases} y = px + \varphi(p) \\ x = -\varphi'(p) \end{cases} \leftarrow \left\| \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dp} = x + p\dfrac{dx}{dp} + \varphi'(p) \\ \dfrac{dy}{dp} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dp} = p\dfrac{dx}{dp} \end{array} \right.$$

Рассмотрим <u>уравнение Лагранжа.</u>

(4) $\qquad y = x \cdot f(p) + \varphi(p)$, где $p = y'$

Дифференцируем (4) по x:

$$p = f(p) + [x \cdot f'(p) + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

Это линейное уравнение относительно x и $\dfrac{dx}{dp}$. Решив его, получим:

(5) $\qquad x = CA(p) + B(p)$

Уравнения (4) и (5) будут параметрически определять общий интеграл. Исключив из них параметр p, если это возможно, получим общий интеграл в виде $\Phi(x, y, C) = 0$.

Пример: $y = xy'^2 + y'^2$ (уравнение Лагранжа)

Самостоятельно.

Пример: $y = 2xy' + y'^2$

Самостоятельно.

Пример: $y = f(x, y')$ или $x = f(y, y')$

Введение параметра $p = y'$.

$$\begin{cases} y = f(x, p) \\ p = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial p} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = f(y, p) \\ \dfrac{1}{p} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial p} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial y} \end{cases}$$

Пример: $y = (y')^2 + xy' - x$

Решение:

II. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Решаем n-кратным интегрированием, вводим n произвольных постоянных.

Пример: $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Начальные условия: $\begin{cases} y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2} \\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

Найти частное решение:

III. Уравнение 2 порядка, не содержащее явно искомую функцию *y*

(6) $y'' = f(x, y')$ «без y»

Решение: Обозначим $\dfrac{dy}{dx} = p$, тогда $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$.

Подставляя в уравнение (6), получим уравнение 1-го порядка: $\dfrac{dp}{dx} = f(x, p)$.

Решим относительно $p = p(x, C_1)$, тогда $y = \int p(x, C_1)dx + C_2$.

Пример. $x^3 \cdot y'' + x^2 \cdot y' - 1 = 0$

IV. Дифференциальное уравнение вида $y'' = f(y, y')$

(7) $y'' = f(y, y')$ - дифференциальное уравнение 2-го порядка, не содержащее явно независимую переменную *x*, но содержащее (y''_x, y'_x).

Решение: $p = \dfrac{dy}{dx}$, но $p -$ функция от y или $p = \varphi(y)$. Тогда

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p$$

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(p)\right] \qquad \frac{d}{dx}(p) \equiv (p)'_x$$

Подставляя в уравнение (7) $p = y'_x$ и $y''_{xx} = p\cdot\dfrac{dp}{dy}$ получим $p\cdot\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$.

Интегрируем $p = p(y, C_1)$.

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1)$$

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx - \text{уравнение с разделёнными переменными.}$$

Интегрируем ещё раз и получаем решение в виде общего интеграла:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

<u>Пример</u>: $2y\cdot y'' = (y')^2$

Начальные условия: $\begin{cases} y(-1) = 4 \\ y'(-1) = 1 \end{cases}$

$y' = p;$ $\qquad y'' = p\dfrac{dp}{dy};$

$$2y\cdot p\frac{dp}{dy} = p^2$$

$$2y\cdot\frac{dp}{dy} = p$$

$$2\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

$$2\ln p = \ln C\cdot y$$

$p^2 = C\cdot y$ $\qquad$ начальные условия: $\begin{matrix} y' = p(-1) = 1 \\ y(-1) = 4 \end{matrix}$

$$1 = C\cdot 4$$

$$C = \frac{1}{4}$$

$$p^2 = \frac{1}{4}y; \qquad p = \frac{1}{2}\sqrt{y}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{y}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{1}{2} dx + C_0 = \frac{x}{2} + C_0$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x}{2} + C_0; \qquad \sqrt{y} = \frac{x}{4} + \frac{C_0}{2}$$

Начальные условия при $x = -1$: $\quad \sqrt{4} = \frac{-1}{4} + \frac{C_0}{2} \Big| \to C_0 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

Ответ : $\left[\begin{array}{l} 1. p = 0; y = C \\ 2. p \neq 0 \\ \sqrt{y} = \frac{x}{4} + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}(x+9) \\ y = \frac{1}{16}(x+9)^2 \end{array}\right]$

Л.4 Линейное уравнение n-го порядка

I. Общая теория линейного уравнения

(1) $\qquad L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x)$

Если $f(x) = 0,$ то уравнение называется <u>однородным</u>.

(2) $\qquad L(y) = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0$

(3) $\qquad |x - x_0| \leq a$

Здесь $L(y)$ называется линейным оператором – совокупность операций над y в (2).

<u>Т</u>. Если $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны в области $|x - x_0| \leq a,$ то $\exists$ единственное решение уравнения (1) с начальными условиями:

(4) $\qquad y(x_0) = y_0, \qquad y^{(\nu)}(x_0) = y_\nu^0, \qquad \nu = 1, \ldots, n-1,$

где y_0 и y_ν^0 - произвольные числа. Это решение непрерывно в области (3).

Сначала рассмотрим уравнение (2).

<u>3 свойства оператора</u> $L(y)$:

- $L(Cy) = C \cdot L(y)$
- $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$
- $L(C_1 y_1 + \ldots + C_m y_m) = C_1 \cdot L(y_1) + \ldots + C_m \cdot L(y_m)$

Здесь $C_1, \ldots, C_m$ – произвольные постоянные.

Доказательства очевидны. Отсюда следует:

Т. Если $y_1, \ldots, y_m$ – решения уравнения (2), то и $y = C_1 y_1 + \ldots + C_m y_m$ – также решения уравнения (2) при произвольных $C_1, \ldots, C_m$.

Определение линейно независимых функций

Пусть $U_1(x),...,U_m(x)$ – функции, заданные при $x \in [a,b]$. Функции $U_1(x),...,U_m(x)$ называются линейно зависимыми в этом интервале, если $\exists$ *const* $\alpha_1,...,\alpha_m$ не все равные нулю, для которых выполняется:

(5) $\alpha_1 U_1 + ... + \alpha_m U_m \equiv 0, \qquad x \in [a,b]$

Если таких *const* $\alpha_1,...,\alpha_m$ нет, то $U_1,...,U_m$ называются линейно независимыми.

Н. и *D.* условие линейной зависимости $U_1,...,U_n$:

Пусть $U_1,...,U_n$ – линейно зависимые, т.е. выполняется (5). Дифференцируем тождество (5) $(n-1)$ раз, получим:

(6) $\alpha_1 U_1^{(k)} + ... + \alpha_n U_n^{(k)} = 0$,

где $k = 1,2,...,n-1$.

Уравнениям (5) и (6) удовлетворяют $\alpha_1,...,\alpha_n$ не все равные нулю. Тогда имеем:

(7) $$W(U_1,...,U_n) = \begin{vmatrix} U_1 & ... & ... & U_n \\ U_1' & ... & ... & U_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ U_1^{(n-1)} & ... & ... & U_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0, \qquad x \in [a,b]$$

Определитель $W(U_1,...,U_n)$ называется определителем Вронского или вронскианом.

Равенство (7) – необходимое (Н.) условие линейной зависимости $U_1,...,U_n$.

Если в (7) $U_1,...,U_n$ – решения уравнения (2), то (7) – и достаточное (*D.)* условие линейной зависимости $U_1,...,U_n$.

Т. Если $y_1,...,y_n$ – решения уравнения (2) и

(8) $W(y_1,...,y_n)\big|_{x=x_0} = 0,$ то

(9) $W(y_1,...,y_n) \equiv 0, \qquad x \in [a,b]$ и $y_1,...,y_n$ – линейно зависимые решения при $x \in [a,b]$.

Т. Для того, чтобы решения $z_1,...,z_n$ уравнения (2) были линейно независимые, *Н.* и *D.,* чтобы в $\forall$ (.) x_0 $W(z_1,...,z_n)\big|_{x=x_0} \neq 0.$ И если $W(x_0) \neq 0,$ то и $W(x) \neq 0,$ $x \in [a,b]$. Если же $W(x_0) = 0,$ то и $W(x) \equiv 0.$

Общее решение уравнения (2)

Т. Если $z_1,...,z_n$ - линейно независимые решения уравнения (2), то

(10) $y = C_1 z_1 + ... + C_n z_n$ – есть общее решение в области $x \in [a,b]$

$-\infty < y_k < \infty$; $\qquad k = 1,...,n$

Доказательство: т.к. $W(z_1,...,z_n)\big|_{x=x_0} \neq 0,$ то из (11)

$$(11)\qquad \begin{cases} y(x_0) = y_0 = C_1 z_1(x_0) + ... + C_n z_n(x_0) \\ y'(x_0) = y'_0 = C_1 z'_1(x_0) + ... + C_n z'_n(x_0) \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0 = C_1 z_1^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n z_n^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

при $\forall\ y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ найдём $C_1,...,C_n,$ при которых решение удовлетворяет заданным условиям задачи Коши. Тогда (10) действительно является общим решением уравнения (2).
$\exists\, n$ линейно независимых решений. Более n таких решений быть не может.

Определение: линейно независимые решения $y_1,...,y_n$ называются фундаментальной системой решений.

Неоднородное уравнение (1)
Пусть y_1 есть решение уравнения (1), т.е. $L(y_1) = f(x)$.
Пусть
(12) $y = z + y_1$, где $z -$ неизвестная функция.
Подставляя (12) в (1) получим:

$$z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + ... + p_n(x)z + y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + p_n(x)y_1 = f(x)$$

Т.к. $L(y_1) = f(x)$.
(13) $z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + ... + p_n(x)z = 0$
т.е. z является решением соответствующего однородного уравнения. Если $z_1,...,z_n -$ фундаментальная система решений уравнения (13), то общее решение $z = C_1 z_1 + ... + C_n z_n$, а общее решение уравнения (1):
(14) $y = C_1 z_1 + ... + C_n z_n + y_1,$ т.е. общее решение уравнения (1) есть сумма частного решения неоднородного уравнения (1) и общего решения соответствующего однородного уравнения (2).
Если y_1 и $y_2 -$ решения уравнений $L(y_1) = f_1(x)$ и $L(y_2) = f_2(x)$, то $y = y_1 + y_2$ есть решение уравнения $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$.
Как найти частное решение неоднородного уравнения (1)?
Лагранж дал способ нахождения этого частного решения, если уже найдена фундаментальная система решений $z_1,...,z_n$ соответствующего однородного уравнения (2).
(10) – общее решение (2), если $z_1,...,z_n -$ линейно независимые решения. Будем искать решение неоднородного уравнения (1) в виде (10), где $C_1(x),...,C_n(x)$ считаем неизвестными функциями, которые нужно найти.

Л.5

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

(1) $L(y)=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=f(x)$

(2) $L(y)=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=0$

Пусть фундаментальная система решений $z_1,...,z_n$ соответствующего однородного уравнения (2) найдена. Будем искать решение неоднородного уравнения (1) в виде:

(3) $y=C_1(x)z_1+...+C_n(x)z_n$,

где $C_1(x),...,C_n(x)$ – неизвестные функции, которые следует найти так, чтобы (3) стало решением неоднородного дифференциального уравнения (1).

Если подставим *y* из (3) в (1), то для нахождения $C_1(x),...,C_n(x)$ получим одно уравнение. Но у нас *n* неизвестных, поэтому необходимо ещё $(n-1)$ уравнений.

Найдём $y', y'',..., y^{(k)}$.

$$y'=C_1(x)\cdot z_1'+...+C_n(x)\cdot z_n'+C_1'(x)\cdot z_1+...+C_n'(x)\cdot z_n$$

Потребуем, чтобы $C_1'(x)\cdot z_1+...+C_n'(x)\cdot z_n=0$

$$y''=C_1(x)\cdot z_1''+...+C_n(x)\cdot z_n''+C_1'(x)\cdot z_1'+...+C_n'(x)\cdot z_n'$$

Полагаем: $C_1'(x)\cdot z_1'+...+C_n'(x)\cdot z_n'=0$

(3-а) $C_1'(x)\cdot z_1^{(k)}+...+C_n'(x)\cdot z_n^{(k)}=0$ $\qquad k=1,...,n-2$

$y^{(k)}=C_1(x)\cdot z_1^{(k)}+...+C_n(x)\cdot z_n^{(k)},$ $\qquad k=1,...,n-1$

(4) $y^{(n)}=C_1(x)\cdot z_1^{(n)}+...+C_n(x)\cdot z_n^{(n)}+C_1'(x)\cdot z_1^{(n-1)}+...+C_n'(x)\cdot z_n^{(n-1)}$

Подставляя y и $y^{(k)}$ в (1), получим

$C_1L(z_1)+...+C_nL(z_n)+C_1'(x)\cdot z_1^{(n-1)}+...+C_n'(x)\cdot z_n^{(n-1)}=f(x)$

т.к. $L(z_k)=0$, $k=1,...,n$, то (4) имеет вид

(5) $C_1'(x)\cdot z_1^{(n-1)}+...+C_n'(x)\cdot z_n^{(n-1)}=f(x)$

Равенства (3-а) и (5) являются *n* алгебраическими линейными неоднородными уравнениями с *n* неизвестными $C_1'(x),...,C_n'(x)$.

Определитель этой линейной системы есть $W(z_1,...,z_n)\neq 0$.

Решив систему, используя $z_1,...,z_n$, их производные и $f(x)$,найдём единственное решение $C_k'(x)=\varphi_k(x)$, $k=1,...,n$.

Отсюда

(6) $C_k(x)=\int\varphi_k(x)dx+C_k^0,$ $\qquad k=1,...,n$

Здесь C_k^0 - произвольные постоянные.

Подставляя эти значения в (3), получим решение неоднородного уравнения (1):

(7) $y=z_1\int\varphi_1(x)dx+...+z_n\int\varphi_n(x)dx+C_1^0\cdot z_1+...+C_n^0\cdot z_n$ – общее решение уравнения (1).

Если $C_1^0=...=C_n^0=0$, то получим частное решение неоднородного уравнения (1).

Таким образом, для решения уравнения (1) надо лишь найти *n* линейно независимых решений однородного уравнения (2), после чего легко получить общее решение неоднородного уравнения в виде (7).

Частный случай – неоднородное линейное уравнение 2-го порядка, $a_1, a_2, f(x)$ – функции от *x*.

(8) $$y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = f(x)$$

Рассмотрим общий метод нахождения частных решений неоднородного уравнения. Пусть решение однородного уравнения:

(9) $$y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$$

(10) $$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (8) в виде (10), рассматривая C_1 и C_2 как неизвестные функции от *x*: $C_1(x), C_2(x)$.

Дифференцируем (10) и подставляем в (8)

$$y' = C_1 \cdot y_1' + C_2 \cdot y_2' + \underbrace{C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2}_{=0}$$

Подберём искомые функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ так, чтобы выполнилось равентсво

$$C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2 = 0$$

Тогда $y' = C_1 \cdot y_1' + C_2 \cdot y_2'$.

$$y'' = C_1 \cdot y_1'' + C_2 \cdot y_2'' + C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2'$$

Подставим в (8) и группируем:

$$C_1\underbrace{\left(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1\right)}_{=0} + C_2\underbrace{\left(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2\right)}_{=0} + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x)$$

Нули, т.к. y_1, y_2 – решения однородного уравнения.

Тогда

(11) $$\begin{cases} C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2 = 0 \\ C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' = f(x) \end{cases}$$

Если C_1, C_2 удовлетворяют (11), тогда (10) будет решением неоднородного уравнения (8).

Решая систему, найдём:

$$C_1' = \varphi_1(x); \qquad C_2' = \varphi_2(x)$$

$$C_1 = \int \varphi_1(x) dx + C_1^0; \quad C_2 = \int \varphi_2(x) dx + C_2^0,$$

где C_1^0, C_2^0 – произвольные постоянные интегрирования.

Подставим C_1 и C_2 в (10), получим общее решение неоднородного уравнения (8).

Пример. Найти общее решение уравнения

(1) $$y'' - \frac{1}{x} \cdot y' = x$$

Решение: найдём общее решение однородного уравнения

(2) $$y'' - \frac{1}{x} \cdot y' = 0$$

$$\frac{y''}{y'}=\frac{1}{x}; \qquad \frac{1}{y'}\cdot\frac{d}{dx}(y')=\frac{1}{x}$$

$$\int\frac{d(y')}{y'}=\int\frac{1}{x}dx+\ln C$$

$$\ln|y'|=\ln|Cx|; \qquad y'=Cx$$

$$\frac{dy}{dx}=Cx; \qquad dy=Cxdx; \qquad y=C\frac{x^2}{2}+C_2$$

(3) $\quad y=C_1\cdot x^2+C_2,\quad$ где $C_1=\dfrac{C}{2}.$

Чтобы $y=C_1\cdot x^2+C_2$ было решением уравнения (1) необходимо определить C_1 и C_2 из системы:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'\cdot x^2+C_2'\cdot 1=0 \\ 2\cdot C_1'\cdot x+C_2'\cdot 0=x \end{array}\right\| \rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1'=\dfrac{1}{2} \\ C_2'=-\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right.$$

$$C_1=\int\frac{dx}{2}=\frac{1}{2}x+C_1^0; \qquad C_2=\int-\frac{x^2}{2}dx=-\frac{x^3}{6}+C_2^0$$

Подставляя в (3), получаем:

$$y=C_1^0\cdot x^2+C_2^0+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}$$

Ответ: $y=C_1^0\cdot x^2+C_2^0+\dfrac{x^3}{3}$, где $C_1^0, C_2^0-const.$

Л.6 Понижение порядка линейного неоднородного дифференциального уравнения при известном одном частном решении соответствующего линейного однородного уравнения.

Линейным дифференциальным уравнением *n-ого* порядка называется уравнение вида :

(1) $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y^{I}+a_n(x)y=f(x)$

Здесь функции $a_1(x),a_2(x),\ldots,a_n(x)$ и $f(x)$ заданы и непрерывны для $x\in(a,b)$.Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (1) называется однородным.

Зная одно частное решение y_1 линейного *однородного* уравнения, можно с помощью линейной замены искомой функции

(2) $y=y_1\cdot\int zdx$

понизить порядок, а следовательно, и порядок соответствующего неоднородного уравнения на единицу. Полученное уравнение (n-1)-го порядка относительно z также является линейным. Проверим это утверждение. Дано уравнение :

(3) $y''' + \frac{2}{x}y'' - y' + \frac{1}{x\ln x}\cdot y = x$

известно частное решение $y_1 = \ln x$ соответствующего однородного уравнения.
Понизить порядок уравнения.Воспользуемся подстановкой (2)

$y = \ln x \cdot \int z dx$, где z – новая неизвестная функция.

Тогда, подставляя соответствующие производные

$$y' = \frac{1}{x}\cdot\int z dx + z\ln x,\ y'' = -\frac{1}{x}\cdot\int z dx + \frac{2z}{x} + z'\ln x,$$

$$y''' = \frac{2}{x^3}\cdot\int z dx - \frac{3z}{x^2} + \frac{3z'}{x} + z''\ln x$$

в уравнение (3), получим уравнение второго порядка

$$z''\ln x + \frac{2\ln x}{3}\cdot z' + (\frac{1}{x^2} - \ln x)\cdot z = x\,.$$

Отметим, что применяя указанную подстановку к линейному уравнению второго порядка и учитывая, что линейное уравнение первого порядка интегрируется в квадратурах, можно проинтегрировать в квадратурах всякое линейное уравнение второго порядка, если известно одно частное решение соответствующего однородного уравнения.

Пример : Найти решение дифференциального уравнения

(4) $y'' + \frac{2}{x}\cdot y' + y = 0$, если $y_1 = \frac{\sin x}{x}$

Решение:

$y = \frac{\sin x}{x}\int z dx,$ тогда

(5)
$$y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\int z dx + \frac{\sin x}{x}\cdot z$$
$$y'' = \frac{\sin x}{x}\cdot z' + \frac{2(x\cos x - \sin x)}{x^2}\cdot z - \frac{(x^2-2)\sin x + 2x\cos x}{x^3}\int z dx$$

Подставим (5) в (4). Получим уравнение

$\sin x\cdot z' + 2\cos x\cdot z = 0$, отсюда $z = \frac{C_1}{\sin^2 x}$

Следовательно: $y = \frac{\sin x}{x}\int\frac{C_1 dx}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{x}(C_2 - C_1 ctgx) = C_2\cdot\frac{\sin x}{x} - C_1\cdot\frac{\cos x}{x}$

Ответ: $y = C_2\cdot\frac{\sin x}{x} - C_1\cdot\frac{\cos x}{x}$.

Л.7 Формула Лиувилля – Остроградского.

Одним из замечательных свойств линейных уравнений является то, что общее решение таких уравнений можно найти по их известным частным решениям. Вспомним теорему о структуре общего решения линейного однородного уравнения

Теорема: Если $y_1, y_2, ..., y_n$ – линейно независимые частные решения уравнения $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = 0$, то $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$ есть общее решение этого уравнения (здесь $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные). Замечание. Функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называются линейно независимыми для $x \in (a,b)$, если они не связаны никаким тождеством $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + ... + \alpha_ny_n = 0$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – const, не равные нулю одновременно. Для случая двух функций это усливие можно сформулировать так : две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, если их отношение не является постоянной величиной : $y_1 / y_2 \neq const$.

Достаточным условием линейной независимости n функций, непрерывных вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка для $x \in (a,b)$, является то, что определитель Вронского $W[y_1, y_2, ...y_n]$ этих функций не равен нулю для $x \in (a,b)$,

т.е. $$W[y_1, y_2, ...y_n] = W(U_1, ..., U_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Если данные n функций являются частными решениями линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка, то это условие (необращение в нуль) является не только достаточным, но и необходимым условием линейной независимости этих n решений.

Определитель Вронского n решений линейного однородного уравнения n –го порядка $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0$ *связан с первым коэффициентом этого уравнения* $a_1(x)$ формулой Лиувилля-Остроградского :

(1) $$W[y_1, y_2, ..., y_n] = W[y_1, y_2, ..., y_n]\Big|_{x=x_0} \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)dx}$$

Совокупность n решений линейного однородного уравнения $n-$го порядка, определенных и линейно независимых для $x \in (a,b)$, называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

(2) $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$

фуднаментальная система состоит из двух линейно независимых решений $y_1(x)$ и $y_2(x);$ его общее решение находится по формуле

(3) $y=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)$

Если для такого уравнения *известно одно частное решение* $y_1(x),$ то второе его решение, линейно независимое с первым, можно найти по *формуле Лиувилля-Остроградского :*

(4) $y_2(x)=y_1(x)\cdot\int\frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2(x)}dx,$

которая является следствием формулы (1).

Это дает возможность интегрировать линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка, для которых известно одно частное решение $y_1(x),$ сразу, не прибегая к понижению их порядка.

Для уравнения $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ известно решение $y_1(x)=\frac{\sin x}{x}$. Найдем по формуле (4) второе частное решение :

$$y_2(x)=\frac{\sin x}{x}\int\frac{e^{-2\int\frac{dx}{x}}}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{x}$$

Поэтому общее решение данного уравнения имеет вид :

$$y=C_1\frac{\sin x}{x}-C_2\frac{\cos x}{x}.$$

Л.8 Однородное уравнение с постоянными коэффициентами

(1) $\quad L(y)=y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\cdot y'+a_n\cdot y=0$

Найдём *n* линейно независимых решений уравнения (1) в виде элементарных функций.

Ищем решение в виде:

(2) $\quad y=e^{\lambda x},\qquad \lambda-const\qquad$ (или $e^{kx}, k-const$)

Пусть $k=1,\ldots,n$ дифференцируем.

$y^{(k)}=\lambda^k e^{\lambda x},$ подставляем в (1):

(3) $\quad L(e^{\lambda x})=e^{\lambda x}\cdot P_n(\lambda)=0,$ где

(4) $\quad P_n(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n$ - характеристический полином.

Т.к. $e^{\lambda x}\neq 0,$ то

(5) $\quad P_n(\lambda)=0;\qquad \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ – корни характеристического уравнения.

(6) $\quad e^{\lambda_1 x},\ldots,e^{\lambda_n x}-n$ линейно независимых решений.

(7) $y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + ... + C_2 \cdot e^{\lambda_n x}$ – общее решение уравнения (1). (Если $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – вещественные различные корни).

Если среди корней характеристического уравнения есть комплексные, то пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \lambda_3, ..., \lambda_n -$ действительные различные.

Тогда:
$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$
$$= (C_1 + C_2)e^{\alpha x}\cos\beta x + i(C_1 - C_2)e^{\alpha x}\sin\beta x =$$
$$= \overline{C_1} e^{\alpha x}\cos\beta x + \overline{C_2} e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

где $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2 - const.$

Общее решение уравнения (1):

(8) $y = \overline{C_1} e^{\alpha x}\cos\beta x + \overline{C_2} e^{\alpha x}\sin\beta x + C_3 e^{\lambda_3 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$

Случай кратных корней характеристического уравнения

Т. Каждый действительный корень λ кратности *m* характеристического уравнения (5) порождает решения

(9) $e^{\lambda_1 x}, x \cdot e^{\lambda_1 x}, ..., x^{m-1} \cdot e^{\lambda_1 x};$

Пара комплексных корней кратности *m* порождает *2m* решений вида:

(10) $x^k \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$ и $x^k \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \qquad k = 0,1,...,m-1.$

Если $\lambda = \beta i$ и $\overline{\lambda} = -\beta i,$ т.е. λ и $\overline{\lambda}$ - чисто мнимые $(\alpha = 0)$, то им соответствуют решения:

(11) $x^k \cdot \cos\beta x, \ x^k \cdot \sin\beta x, \qquad k = 0,1,...,m-1.$

Все эти *n* решений, соответствующие всем корням характеристического уравнения, будут линейно независимыми.

Таким образом, во всех случаях общее решение уравнения (1) находим в элементарных функциях.

Метод неопределённых коэффициентов

(12) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$

При некоторых $f(x)$ можно найти частные решения уравнения (12).

Пусть $f(x) = \overline{P_m}(x) \cdot e^{\alpha x}\cos\beta x + \overline{Q_{m1}}(x) \cdot e^{\alpha x}\sin\beta x$, тогда частное решение уравнения (12) ищем в виде:

(13) $y_1 = P_m(x) \cdot e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}\sin\beta x,$

где $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени m с неопределёнными коэффициентами, если $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения (5).

Если λ - корень характеристического уравнения (5) кратности ν, то

(14) $y_1 = x^\nu \cdot P_m(x) \cdot e^{\alpha x}\cos\beta x + x^\nu \cdot Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}\sin\beta x$

Здесь степень полиномов $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ должна быть взята наибольшая из степеней полиномов $\overline{P_m}(x)$ и $\overline{Q_{m1}}(x) \qquad (m \geq m_1).$

Если в частности $f(x)=\overline{P_m}(x)$, т.е. $\alpha=\beta=0$, то

$y_1=P_m(x)$, если $\lambda=0$ не является корнём характеристического уравнения,

$y_1=x^{\nu}\cdot P_m(x)$, если $\lambda=0$ - корень кратности ν.

Если $f(x)=\overline{P_m}(x)\cdot e^{\alpha x},\beta=0$, тогда

$y_1=P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$, если $\alpha-$ не является корнем характеристического уравнения,

$y_1=x^{\nu}\cdot P_m(x)\cdot e^{\alpha x}$, если $\lambda=\alpha-$корень характеристического уравнения кратности ν.

Если $f(x)=\overline{P_m}(x)\cos\beta x+\overline{Q_{m1}}(x)\sin\beta x$, то

$y_1=P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$, если $\lambda=\beta\cdot i$ не является корнем уравнения (5) и

$y_1=x^{\nu}\cdot P_m(x)\cos\beta x+x^{\nu}\cdot Q_m(x)\sin\beta x$, если $\lambda=\beta\cdot i$ - корень кратности ν уравнения (5).

Во всех случаях неопределённые коэффициенты полиномов $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ можно найти, подставляя y_1 в уравнение (12) и после сокращения на множитель $e^{\alpha x}$ сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x* слева и справа при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$.

Метод неопределённых коэффициентов применим лишь в тех случаях, когда $f(x)$ имеет указанный вид.

При любом $f(x)$ частное решение неоднородного уравнения можно найти методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).

Преобразование уравнения

(15) $L(y)=y^{(n)}+p_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)\cdot y=0$ к линейному с постоянными коэффициентами введением новой независимой переменной $\tau=\varphi(x)$.

Имеем: $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\tau}\cdot\varphi'(x)$$

(16) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{d\tau^2}\cdot[\varphi'(x)]^2+\frac{dy}{d\tau}\cdot\varphi''(x)$$

....

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^ny}{d\tau^n}\cdot[\varphi'(x)]^n+\ldots+\frac{dy}{d\tau}\cdot\varphi^{(n)}(x)$$

Подставим (16) в (15), сократим на $[\varphi'(x)]^n$, получим:

$$\frac{d^ny}{d\tau^n}+Q_1(x)\frac{d^{n-1}y}{d\tau^{n-1}}+\ldots+Q_{n-1}(x)\cdot\frac{dy}{d\tau}+\frac{p_n(x)}{[\varphi'(x)]^n}\cdot y=0$$

Т.к. здесь коэффициенты должны быть постоянными, то

$A^np_n(x)=[\varphi'(x)]^n$, где $A-const$, отсюда

(17) $$\tau=\varphi(x)=A\int\sqrt[n]{p_n(x)}dx$$

Таким образом, если возможно преобразовать уравнение (15) к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, то только с помощью τ, определённый из (17).

Какой вид должно иметь уравнение (15) чтобы это стало возможным?

Рассмотрим уравнение (15) второго порядка:

(18) $y'' + p(x)\cdot y' + q(x)\cdot y = 0$

Подставим сюда значения y' и y'' из (16)

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \underbrace{\frac{\varphi''(x) + p(x)\cdot\varphi'(x)}{[\varphi'(x)]^2}}_{B}\cdot\frac{dy}{d\tau} + \underbrace{\frac{q(x)}{[\varphi'(x)]^2}}_{A}y = 0$$

Отсюда получим:

(19) $\varphi''(x) + p(x)\cdot\varphi'(x) = B\cdot[\varphi'(x)]^2;$

$\varphi'(x) = A\sqrt{q(x)},$ где $A,\ B - const.$

Подставим $\varphi'(x) = A\sqrt{q(x)}$ в (19):

(20) $\dfrac{A\cdot q'(x)}{2\sqrt{q(x)}} + p(x)\cdot A\cdot\sqrt{q(x)} = B\cdot A^2\cdot q(x)$

Если $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют этому равенству, то уравнение (18) преобразуется к уравнению с постоянными коэффициентами.

Пример: 1) Уравнение Эйлера

(21) $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_n y = 0,$

где $a_1, \ldots, a_n - const$, преобразуется к уравнению с постоянными коэффициентами заменой $\tau = \ln x$.

2) Уравнение Чебышева

(22) $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$

преобразуется к уравнению с постоянным коэффициентом заменой $\tau = \arccos x$.

(23) $\dfrac{d^2y}{d\tau^2} + n^2 y = 0$

Л.9 Составление дифференциальных уравнений

Решение задачи прикладного характера обычно состоит из трёх частей:

1) Составления дифференциального уравнения
2) Решения этого уравнения
3) Исследования решения

При решении геометрических задач полезно пользоваться следующей последовательностью действий:

1) Сделать чертёж и ввести обозначения.

Например, $y = f(x) -$ уравнение искомой линии и т.п.

2) Отделить условия, имеющие место в произвольной точке искомого геометрического места, от условий, имеющих место лишь в отдельных

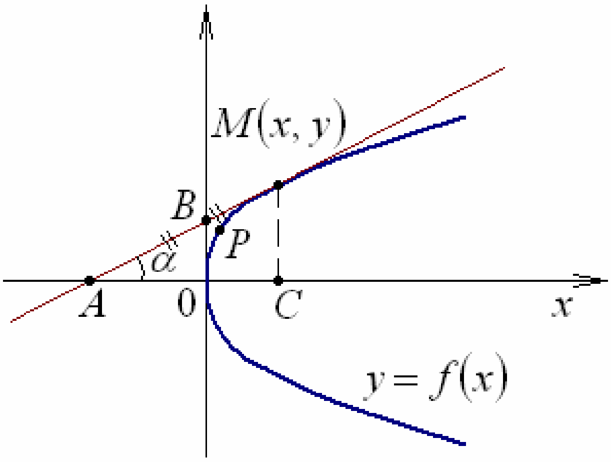
фиксированных точках. Другими словами, выделить начальные условия. В начале, при составлении дифференциального уравнения, их не учитывать.

3) Выразить все упомянутые в задаче величины через x, y и y', учитывая при этом геометрический смысл производной.

4) На основании условия задачи составить дифференциальное уравнение семейства искомых кривых.

5) Найти общее решение полученного дифференциального уравнения, а затем по начальным условиям найти конкретную интегральную кривую.

Пример 1. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $P(1;2)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью Ox делится пополам в точке пересечения с осью Oy.



Решение:

$M(x, y) \in L$

AM – касательная к L.

$$tg\alpha = y' = \frac{CM}{AC} = \frac{y}{2x}$$

(1) $$y' = \frac{y}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln C$$

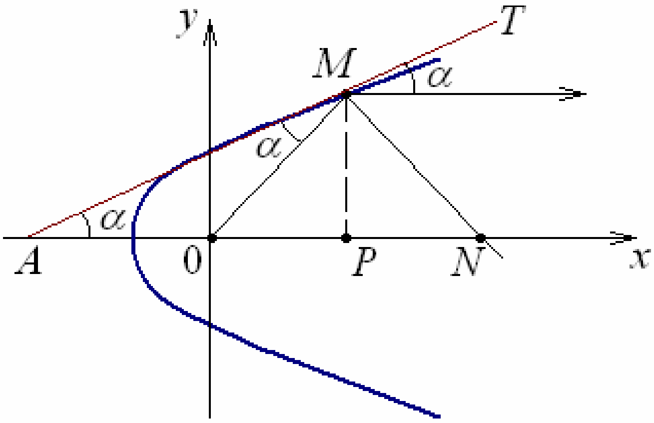
$2\ln y = \ln Cx \Rightarrow y^2 = Cx$ – семейство парабол, с вершиной в начале координат, с осью симметрии Ox.

Выделим одну кривую, удовлетворяющую начальным условиям, т.е. проходящую через точку (.) $P(1;2)$.

$$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^2 = Cx \Rightarrow C = 4$$

Ответ: $y^2 = 4x$

Пример 2. По какой поверхности вращения следует отшлифовать зеркало прожектора, чтобы все лучи, выходящие из источника света, помещённого в точке O на оси вращения, отражались бы зеркалом параллельно этой оси?



Решение:

$M(x, y)$ – произвольная (.) сечения поверхности вращения по меридиану.

$AO = OM$

$AO = AP - OP =$

$= y \cdot ctg\alpha - x,$

Но $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{1}{y'}$.

$$AO = \frac{y}{y'} - x$$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(2) $\dfrac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}$ или

$$ydx - \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy = 0 - \text{однородное уравнение.}$$

Подстановка $x = y \cdot u \Rightarrow dx = u \cdot dy + y \cdot du$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными.

$$y(udy + ydu) = \left(uy + \sqrt{u^2y^2 + y^2}\right)dy$$

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = \frac{dy}{y}$$

$\ln\left(u + \sqrt{u^2 + 1}\right) = \ln y - \ln C$ или $u + \sqrt{u^2 + 1} = \dfrac{y}{C}$ - уравнение меридианного сечения.

$$\left(\frac{y}{C} - u\right)^2 = u^2 + 1$$

$$\frac{y^2}{C^2} - \frac{2yu}{C} = 1 \Leftarrow u = \frac{x}{y}$$

$$y^2 - 2Cy \cdot \frac{x}{y} = C^2$$

$y^2 = 2C\left(x + \dfrac{C}{2}\right) -$ семейство парабол с осью симметрии совпадающей с Ox, с параметром $p = C$ и вершиной в (.) $x = -\dfrac{C}{2}$.

Искомая поверхность вращения – параболоид вращения.

При решении **физических задач**:

1) Установить, какому закону подчиняется рассматриваемый процесс.
2) Решить, что выбрать за независимую переменную, например время t, и что за искомую функцию, например $S = f(t)$.
3) Исходя из условий задачи, определить начальные условия. Например, $S_0 = f(t_0)$. Не использовать их при составлении дифференциального уравнения.
4) Выразить все фигурирующие в задаче величины через t, S и S', используя при этом физический смысл производной как скорости изменения переменной S в изучаемом процессе.
5) Исходя из условия задачи и на основании физического закона, составить дифференциальное уравнение.

6) Найти общий интеграл дифференциального уравнения.
7) По начальным условиям найти частное решение.

Пример 3. Сосуд объёмом 40 л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает каждую секунду 0,2 л азота, который непрерывно размешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через какое время в сосуде будет 99% азота?
Решение: t – время, $x(t)$– количество литров азота в сосуде через t (с) после начала опыта.
Найдём изменение количества азота за Δt секунд - $0,2 \cdot \Delta t$ литров. Чтобы подсчитать сколько азота вытечет за это время, заметим, что количество азота в сосуде не остаётся постоянным. В момент t в 40-литровом сосуде $x(t)$ литров азота. Это значит, что в 1 литре смеси содержится $\frac{x(t)}{40}$ литров азота и если бы в течение этого времени количество азота в сосуде $x(t)$ не менялось, то в вытекающем за время Δt количестве смеси $(0,2 \cdot \Delta t)$ содержалось бы $\frac{x(t)}{40} \cdot 0,2 \cdot \Delta t$ литров азота. Изменение количества азота за время от t до $t + \Delta t$, т.е. $[x(t+\Delta t) - x(t)]$, равно разности количества поступившего и вытекшего азота:

$$\Delta x(t) = x(t+\Delta t) - x(t) \approx 0,2\Delta t - \frac{x(t)}{40} \cdot 0,2\Delta t$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 0,2 - \frac{x \cdot 0,2}{40} \Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

(3) $$\frac{dx}{dt} = 0,2 - \frac{x \cdot 0,2}{40} \Rightarrow x = 40 + C \cdot e^{-\frac{t}{200}}$$

Начальные условия: $x(0) = 40 \cdot 0,8 = 32 \to C$?

$$32 = 40 + C \cdot e^{0} \Rightarrow C = -8$$

Подставляя $C = -8$ в решение, найдём закон, по которому определяется содержание азота в воздухе в любой момент времени:

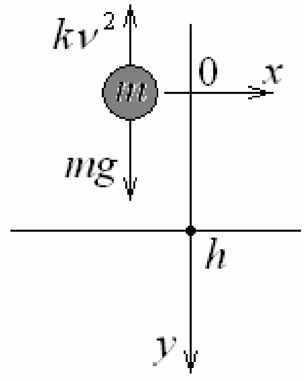
(4) $$x = 40 - 8 \cdot e^{-\frac{t}{200}}$$

Найдём, через какое время сосуд будет содержать 99% азота, т.е. 39,6 л. Имеем:

$$39,6 = 40 - 8 \cdot e^{-\frac{t}{200}}; \qquad e^{-\frac{t}{200}} = 0,05; \qquad e^{\frac{t}{200}} = 20$$

$t = 200 \ln 20 \approx 200 \cdot 2,9957 \approx 600$ с.

Пример 4. Материальная точка массы m падает на землю с высоты h. Найти закон движения точки, если сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.



Решение:

$$\underbrace{F}_{\substack{\text{действующая}\\ \text{сила}}} = \underbrace{mg}_{\substack{\text{сила}\\ \text{тяжести}}} - \underbrace{k\underbrace{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}_{v^2}}_{\substack{\text{сила}\\ \text{сопротивления}\\ \text{среды}}} = m\cdot \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{\substack{a-\text{ускорение}\\ \text{движения}}}$$

$m\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2} = mg - k\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ – уравнение 2-го порядка без y.

$$v = p = \frac{dy}{dt}; \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 = g\left(1 - \frac{k}{mg}v^2\right)$$

$$\left(\frac{k}{mg}\right)^{-1} = A = const$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{A}\left(A - v^2\right)$$

$$\int\frac{dv}{A - v^2} = \frac{g}{A}\int dt$$

$$\frac{\sqrt{A}}{2g}\ln\left|\frac{\sqrt{A}+v}{\sqrt{A}-v}\right| = t + C_1$$

Т.к. начальные условия при $t = 0$ $v = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, тогда $\ln\left|\dfrac{\sqrt{A}+v}{\sqrt{A}-v}\right| = \dfrac{2gt}{\sqrt{A}}$.

$$\frac{\sqrt{A}+v}{\sqrt{A}-v} = e^{\frac{2g}{\sqrt{A}}t}$$

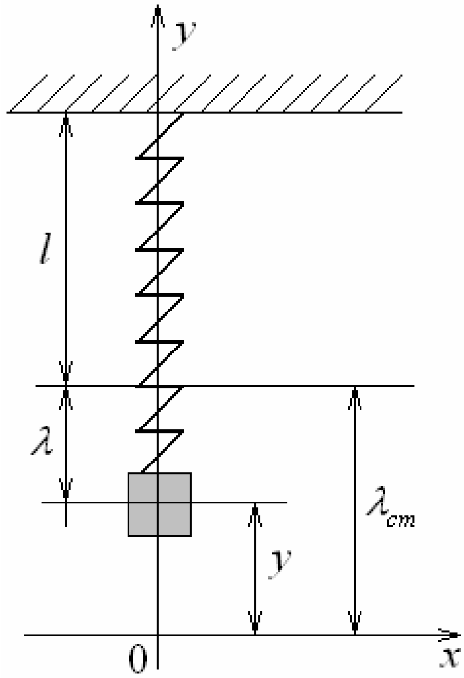
$$\frac{dy}{dt} = v = \sqrt{A}\,\frac{e^{\frac{2g}{\sqrt{A}}t} - 1}{e^{\frac{2g}{\sqrt{A}}t} + 1} = \sqrt{A}th\frac{gt}{\sqrt{A}}$$

$$y = \sqrt{A}\int th\frac{gt}{\sqrt{A}}dt = \frac{A}{g}\ln ch\frac{gt}{\sqrt{A}} + C_2$$

Начальное условие $y = 0$ при $t = 0$. $\qquad 0 = \dfrac{A}{g}\ln\underbrace{ch0}_{1} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

Ответ: $\qquad y = \dfrac{k}{mg^2}\ln ch\left(\sqrt{\dfrac{mg}{k}}\cdot gt\right)$

Пример 5. Груз весом P подвешен на вертикальной пружине, длина которой в ненагруженном состоянии равна l. Найти закон движения груза, пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха.



Решение:

0 – положение равновесия груза,

λ – удлинение пружины в момент времени t,

$\lambda_{ст}$ – статическое удлинение пружины, т.е. расстояние от конца нерастянутой пружины до Ox.

Тогда: $\lambda = \lambda_{ст} - y$ или $\lambda_{ст} - \lambda = y$

Второй закон Ньютона: $F = ma$,

где $m = \dfrac{P}{g}$ – масса груза,

$a = \dfrac{d^2 y}{dt^2}$ – ускорение движения,

F – действующая сила.

По закону Гука: $F_{упр} = c\lambda$,

где c – коэффициент жёсткости (упругости).

Уравнение движения: $m\dfrac{d^2 y}{dt^2} = c\lambda - P$

В положении равновесия сила тяжести (вес) и сила упругости равны: $P = c\lambda_{ст}$

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = c\lambda - c\lambda_{ст} = c(\lambda - \lambda_{ст}) = -cy$$

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = -cy$$

Обозначим $\dfrac{c}{m} = \omega^2$ и уравнение свободных колебаний принимает окончательный вид: $$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

Характеристическое уравнение $k^2 + \omega^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i\omega$. Им соответствуют линейно независимые частные решения: $y_1 = \cos\omega t$, $y_2 = \sin\omega t$.

Общее решение: $y = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$

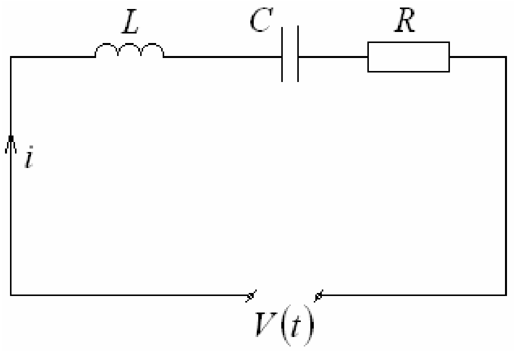
Преобразуем: $$y = \underbrace{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}_{A}\left(\underbrace{\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}}_{\sin\varphi}\cos\omega t + \underbrace{\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}}_{\cos\varphi}\sin\omega t\right)$$

$y = A(\sin\varphi\cos\omega t + \cos\varphi\sin\omega t)$ или

$y = A\sin(\omega t + \varphi)$,

где $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – частота колебаний, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ – амплитуда колебаний, аргумент $\omega t + \varphi$ – фаза колебания, φ – начальная фаза (при $t = 0$).

Пример 6.



Правило Кирхгофа:

$$L\frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C}\int idt = V(t)$$

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dV(t)}{dt}$$ -

дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами $V(t)$ - внешний источник переменного напряжения.

Частный случай: LC контур с $V(t) = V_0 \sin\omega t$

(*) $$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = \omega V_0 \cos\omega t$$

Найти общее решение: ток в LC контуре с внешним источником переменного напряжения в произвольный момент времени t.

Решение:

Однородное уравнение: $L\dfrac{d^2i}{dt^2} + \dfrac{i}{C} = 0$, $\quad i = e^{kt}$

Характеристическое уравнение: $L \cdot k^2 + \dfrac{1}{C} = 0$

$k_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{LC}} \cdot j$, здесь j – мнимая единица, $j = \sqrt{-1}$.

$\alpha = 0$, $\quad \beta = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

$\bar{i} = A\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}} + B\sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$; $A, B - const$ (произвольные постоянные)

Частное решение: $i_1 = E\cos\omega t + F\sin\omega t,\quad E, F - const.$ - ?

$$\frac{di_1}{dt} = -\omega E\sin\omega t + \omega F\cos\omega t$$

$$\frac{d^2i_1}{dt^2} = -\omega^2 E\cos\omega t - \omega^2 F\sin\omega t$$

Подставляя в (*), получаем:

$$L\left(-\omega^2 E\cos\omega t - \omega^2 F\sin\omega t\right) + \frac{1}{C}\left(E\cos\omega t + F\sin\omega t\right) = V_0\omega\cos\omega t$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sin\omega t: & -\omega^2 LF + \dfrac{F}{C} = 0 \\ \cos\omega t: & -\omega^2 LE + \dfrac{E}{C} = V_0\omega \end{array}\right\| \rightarrow \qquad \begin{array}{l} F = 0 \\ E = \dfrac{CV_0\omega}{\left(1-\omega^2 LC\right)} \end{array}$$

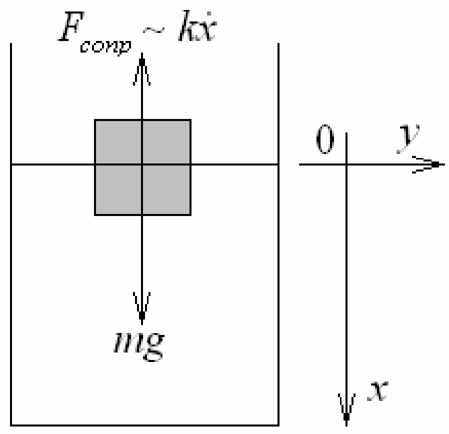
$$i_1 = \frac{CV_0\omega}{1-\omega^2 LC}\cdot\cos\omega t$$

Общее решение: $\quad i = A\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}} + B\sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}} + \dfrac{CV_0\omega}{1-\omega^2 LC}\cdot\cos\omega t$,

где $A, B - const$.

Л.10 Упражнения

Пример: Если тело не слишком быстро погружается в жидкость, то сопротивление приблизительно пропорционально скорости. Найти закон движения тяжёлой материальной точки, погружающейся в жидкость без начальной скорости. $k-$ коэффициент сопротивления, $m-$ масса точки.



$$m\ddot{x} = mg - k\dot{x}$$

$$\ddot{x} = g - \frac{k}{m}\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = g$$

Начальные условия:

$t = 0 \quad x(0) = 0 \qquad \upsilon_0 = \dot{x}(0) = 0$

Решение:

$\ddot{x} + \dfrac{k}{m}\dot{x} = 0$. Найдем решение однородного уравнения.

$x = e^{\lambda t} \qquad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \qquad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda = 0$$

$$\lambda\left(\lambda + \frac{k}{m}\right) = 0 \qquad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -\frac{k}{m}$$

Решение однородного уравнения: $\bar{x} = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2$

Частное решение: $\quad x_1 = At \qquad \dot{x}_1 = A \qquad \ddot{x}_1 = 0$

Подставив, получим: $\quad 0 + \dfrac{k}{m}A = g$, где $A = \dfrac{gm}{k}$.

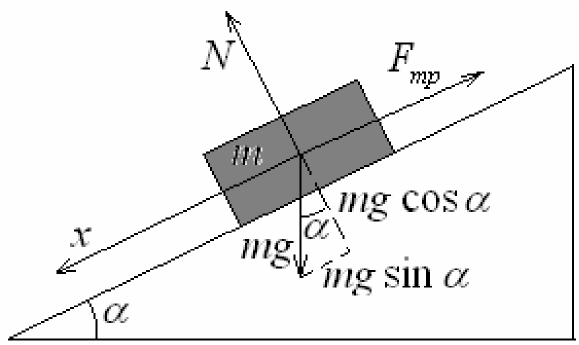
Общее решение: $\quad x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + C_2 + \dfrac{gm}{k}t$

Начальные условия: $\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ \dot{x}(0) = -\dfrac{k}{m}C_1 + \dfrac{gm}{k} = 0 \end{cases}$ $\qquad \dot{x} = -\dfrac{k}{m}C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + \dfrac{gm}{k}$

$$\begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1 = \dfrac{gm^2}{k^2} \end{cases}$$

Ответ: $\qquad x = \dfrac{gm^2}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right) + \dfrac{mg}{k}t$

Пример: Тяжёлое тело без начальной скорости скользит по наклонной плоскости. Найти закон движения, если угол наклона равен α, а коэффициент трения μ.



$$F_{mp} = -\mu N = -\mu mg\cos\alpha$$
$$F = mg\sin\alpha$$
$$m\ddot{x} = F + F_{mp} =$$
$$= mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$
$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$
$$\dot{x} = \int g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)dt =$$
$$= gt(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + C_1$$

Начальные условия: $\qquad \upsilon_0 = \dot{x}(0) = C_1 = 0$

$$\dot{x} = gt(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$x = \int gt(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)dt = \frac{gt^2}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + C_0$$

Начальное условие: $\qquad t = 0$. Если $x(0) = 0$, то $x(0) = C_0 = 0$.

Ответ: $\qquad x = \dfrac{gt^2}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

Примеры:

1) $2y'' + 5y' - 12y = 0$
   $y(0) = 7$
   $y'(0) = -6$

(Ответ: $\qquad y = 4e^{\frac{3}{2}x} + 3e^{-4x}$)

2) $3(y'' + 3y) = 7y'$

(Ответ: $\qquad y = e^{\frac{7}{6}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{59}}{6}x + C_2\sin\dfrac{\sqrt{59}}{6}x\right)$)

3) $y^{(6)} - 9\left(y^{(5)}\right) + 27y^{(4)} - 27y^{(3)} = 0$

Решение: $\lambda^6 - 9\lambda^5 + 27\lambda^4 - 27\lambda^3 = 0$

$\lambda^3(\lambda - 3)^3 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0; \qquad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$

$y_1 = 1;\ y_2 = x;\ y_3 = x^2;\ y_4 = e^{3x};\ y_5 = xe^{3x};\ y_6 = x^2e^{3x}$

(Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}\left(C_4 + C_5x + C_6x^2\right)$)

4) $y'' - 6y' + 5y = x^3 - 2x + 1$

$y(0) = \dfrac{136}{625}; \qquad y'(0) = \dfrac{11}{125}$

Общее решение: $y = C_1e^x + C_2e^{5x} + \dfrac{1}{5}x^3 + \dfrac{18}{25}x^2 + \dfrac{136}{125}x + \dfrac{761}{625}$

С учётом начальных условий $C_1 = -1$ и $C_2 = 0$.

5) $y'' + y' = 3x^2$

(Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x$)

6) $y'' - 6y' + 9y = 3e^{3x}$

(Ответ: $y = e^{3x}\left(C_1 + C_2x + \dfrac{3}{2}x^2\right)$)

7) $y'' - 4y' + 4y = x\cos 2x$

(Ответ: $y = e^{2x}(C_1 + C_2x) - \dfrac{1}{16}\left[\cos 2x + (2x+1)\sin 2x\right]$)

8) $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}}$

Решение: $y'' - y' = 0 \qquad k^2 - k = 0 \qquad k(k-1) = 0$

$k_1 = 0 \quad k_2 = 1$

$y_1 = 1 \qquad y_2 = e^x$

$\overline{y} = C_1 + C_2e^x$

$$y = C_1(x) + C_2(x)e^x \qquad \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^x = 0 \\ C_2'(x)e^x = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}} \end{cases}$$

$$C_2(x) = \int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1+e^x}} = \frac{3}{2}\left(1+e^x\right)^{\frac{2}{3}} + C_2$$

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}}dx$$

Выполняя замену $1 + e^x = u$, получим $C_1(x) = \dfrac{3}{10}\left(1+e^x\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3 - 2e^x\right) + C_1$

$$y = \frac{3}{10}\left(1+e^x\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3 - 2e^x\right) + \frac{3}{2}e^x\left(1+e^x\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{9}{10}\left(1+e^x\right)^{\frac{5}{3}}$$

(Ответ: $y=\frac{9}{10}\left(1+e^{x}\right)^{\frac{5}{3}}+C_1+C_2e^{x}$)

9) $\begin{cases}\frac{dy}{dt}-3y=\frac{dx}{dt}+x\\ \frac{dy}{dt}+x=0\end{cases}$

$x(0)=4 \qquad y(0)=0$

(Ответ: $\begin{cases}x=e^{t}+3e^{-3t}\\ y=-e^{t}+e^{-3t}\end{cases}$)

10) $\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}=y-t\\ \frac{d^2y}{dt^2}=x+1\end{cases}$

Дифференцируем (1) по t: $\frac{d^3x}{dt^3}=\frac{dy}{dt}-1$

$$\frac{d^4x}{dt^4}=\frac{d^2y}{dt^2}\leftarrow(2)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4}=x+1\rightarrow\frac{d^4x}{dt^4}-x=1$$

$$x=C_1e^{t}+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t-1$$

$$y=\frac{d^2x}{dt^2}+t$$

$$y=C_1e^{t}+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t+t$$

<u>Пример</u>: $y''-3y'+2y=2e^{x}\cos\frac{x}{2}$

$$y=\bar{y}_{однор}+y_1$$

$y''-3y'+2y=0; \qquad y=e^{\lambda x}; \qquad y'=\lambda e^{\lambda x}; \qquad y''=\lambda^2e^{\lambda x}$

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)=0$$

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

$\lambda_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}; \qquad \lambda_1=2;\ \lambda_2=1$

$\alpha+i\beta=1+\frac{1}{2}i-$ не корень, $\neq\lambda_1,\neq\lambda_2$.

$$\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$$

$y_1=Ae^{x}\cos\frac{x}{2}+Be^{x}\sin\frac{x}{2}$ (метод неопределённых коэффициентов)

$A=?\quad B=?$

$$(y_1)' = Ae^x \cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}Ae^x \sin\frac{x}{2} + Be^x \sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}Be^x \cos\frac{x}{2}$$

$$(y_1)'' = \left(A + \frac{B}{2}\right)\left\{e^x \cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}e^x \sin\frac{x}{2}\right\} + \left(B - \frac{A}{2}\right)e^x \left\{\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right\}$$

Подставляем в уравнение.

Сократим на e^x.

$$\begin{array}{ll} \cos\frac{x}{2}: & \\ \sin\frac{x}{2}: & \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{3}{4}A + B - 3A - \frac{3B}{2} + 2A = 2 \\ \frac{3}{4}B - A - 3B + \frac{3A}{2} + 2B = 0 \end{array}\right\| \to \quad \begin{array}{l} A = \frac{-8}{5} \\ B = \frac{-16}{5} \end{array}$$

$$y_1 = -\frac{8}{5}e^x \left\{\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right\}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - \frac{8}{5}e^x \left\{\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right\}$$

C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Примеры:

1. $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$

Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}$

2. $3y'' - 2y' - 8y = 0$

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$

3. $y'' + y = 0$

Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Уравнение Эйлера

(1) $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$

(2) $(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = f(x)$

Здесь $a_i - const$.

С помощью подстановок $x = e^t$ для уравнения (1) и $ax + by = e^t$ для уравнения (2) оба эти уравнения преобразуются в линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример 1. Решить уравнение: (3) $x^2 y'' - xy' + y = 0$

Решение: Пусть $x = e^t \Rightarrow t = \ln x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{e^t} = e^{-t}$.

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = y'_t \cdot e^{-t}$$

$$y''_{xx} = \frac{d}{dt}\left[e^{-t}\cdot y'_t\right]\cdot\frac{dt}{dx} = \left[e^{-t}\cdot y'\right]'_t \cdot e^{-t} = (y''_{tt} - y'_t)e^{-2t}$$

$(3) \Rightarrow e^{2t} \cdot e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right) - e^t \cdot e^{-t} \cdot y'_t + y = 0$

$(3) \Rightarrow y''_{tt} - 2y'_t + y = 0 \qquad y = e^{kt}; \qquad y' = ke^{kt}; \qquad y'' = k^2 e^{kt}$

$k^2 - 2k + 1 = 0; \qquad k_{1,2} = 1$

Ответ: $\qquad y = C_1 e^t + C_2 t \cdot e^t = \left(C_1 + C_2 \ln x\right)x$

Пример 2. (4) $\qquad (4x-1)^2 y'' - 2(4x-1)y' + 8y = 0$

Решение: Пусть $4x - 1 = e^t; \qquad dx = \frac{1}{4}e^t dt; \qquad \frac{dt}{dx} = 4e^{-t}$

$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 4e^{-t} \cdot y'$

$y''_{xx} = 16e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right)$

$(4) \Rightarrow 16e^{2t} \cdot e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right) - 4 \cdot 2e^t \cdot e^{-t} \cdot y'_t + 8y = 0$

$(4) \Rightarrow 2y''_{tt} - 3y'_t + y = 0; \qquad y = e^{kt}; \qquad y' = ke^{kt}; \qquad y'' = k^2 e^{kt}$

$2k^2 - 3k + 1 = 0; \qquad k_1 = 1; \quad k_2 = \frac{1}{2}$

$y = C_1 e^t + C_2 \cdot e^{\frac{t}{2}}; \qquad y = C_1(4x-1) + C_2\sqrt{4x-1}$

Пример 3. (5) $\qquad x^2 y'' - xy' + y = \cos\ln x$

Решение: $\qquad x = e^t; \qquad t = \ln x; \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$

$y'_x = y'_t \cdot e^{-t}; \qquad y''_{xx} = \left(y''_{tt} - y'_t\right)e^{-2t}$

$(5) \Rightarrow y''_{tt} - 2y'_t + y = \cos t; \qquad y = \bar{y} + y^*$

$\bar{y} = \left(C_1 + C_2 t\right)e^t; \qquad y^* = A\cos t + B\sin t$

$\left(y^*\right)'_t = -A\sin t + B\cos t; \qquad \left(y^*\right)''_{tt} = -A\cos t - B\sin t$

$-A\cos t - B\sin t + 2A\sin t - 2B\cos t + A\cos t + B\sin t = \cos t$

$$\begin{array}{l} \sin t: \\ \cos t: \end{array} \begin{cases} 2A = 0 \Rightarrow A = 0 \\ -2B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$y = \left(C_1 + C_2 t\right)e^t - \frac{1}{2}\sin t$ или

Ответ: $\qquad y = \left(C_1 + C_2 \ln x\right)x - \frac{1}{2}\sin\ln x$

Л.11 Системы дифференциальных уравнений

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

(1) $\qquad F_i\left(x; y_1, y_2, \ldots; y'_1, y'_2, \ldots\right) = 0, \qquad i = 1,2,...$

связывает одну независимую переменную x и несколько искомых функций $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \ldots$ и их производных. Порядком r_i каждого уравнения (1) называется наивысший порядок входящей в него производной. Вообще требуется n уравнений (1) для отыскания n искомых функций $y_k(x)$.

Общее решение $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x), \ldots$должно содержать $r = r_1 + r_2 + \ldots r_n$ произвольных постоянных.

Интегрирование системы (1) часто можно свести к интегрированию одного обыкновенного дифференциального уравнения порядка r путём исключения $n-1$ переменных y_k и их производных (метод подстановки).

Каждую систему (1) можно свести к равносильной ей системе, где r уравнений 1-го порядка, путём замены высших производных вспомогательными неизвестными функциями.

Система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$a_{ij} - const$; $t -$ аргумент; $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t) -$ искомые функции.

Пример 1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$ $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$

Дифференцируем (1): $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} - 3\dfrac{dy}{dt}$.

Подставляем (2) в (1): $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} - 3(3x + y) = \dfrac{dx}{dt} - 9x - \underbrace{3y}_{\substack{\text{выражаем} \\ \text{из}(1)}}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} - 9x + \frac{dx}{dt} - x = 2\frac{dx}{dt} - 10x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + 10x = 0, \qquad x = e^{kt}$$

$$k^2 - 2k + 10 = 0$$

$$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 10} = 1 \pm 3i$$

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^t \cos 3t + C_2 e^t \sin 3t \\ y = \dfrac{1}{3}\left(x - \dfrac{dx}{dt} \right) = C_1 e^t \sin 3t - C_2 e^t \cos 3t \end{cases}$

<u>Пример 2</u>. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2 \end{cases}$

$$\begin{matrix} x_1 = C_1 e^{kt} \\ x_2 = C_2 e^{kt} \end{matrix} \qquad \begin{cases} kC_1 e^{kt} = 2C_1 e^{kt} + 2C_2 e^{kt} \\ kC_2 e^{kt} = C_1 e^{kt} + 3C_2 e^{kt} \end{cases}$$

(1) $\begin{cases} (2-k)C_1 + 2C_2 = 0 \\ C_1 + (3-k)C_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = (2-k)(3-k) - 2 = 0$$

Характеристическое уравнение системы:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \qquad k_1 = 1; \qquad k_2 = 4$$

$$\begin{cases} x_1 = C_1^1 e^t + C_1^2 e^{4t} \\ x_2 = C_2^1 e^t + C_2^2 e^{4t} \end{cases}$$

Подставим в (1) $k_1 = 1$ и найдём зависимость между C_1^1 и C_2^1:

$$\left.\begin{cases} (2-1)C_1^1 + 2C_2^1 = 0 \\ C_1^1 + (3-1)C_2^1 = 0 \end{cases}\right\| \to C_2^1 = -\frac{1}{2} C_1^1$$

Подставим в (1) $k_2 = 4$ и найдём зависимость между C_1^2 и C_2^2:

$$\left.\begin{cases} -2C_1^2 + 2C_2^2 = 0 \\ C_1^2 - C_2^2 = 0 \end{cases}\right\| \to C_2^2 = C_1^2$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = C_1^1 e^t + C_1^2 e^{4t} \\ x_2 = -\dfrac{C_1^1}{2} e^t + C_1^2 e^{4t} \end{cases}$

Пример 3. Неоднородная система дифференциальных уравнений:

(1) $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x(t) = ? \\ y = y(t) = ? \end{cases}$

$\begin{cases} x = \bar{x} + x^* \\ y = \bar{y} + y^* \end{cases}$ $\bar{x}$ и $\bar{y}$ - решения однородной системы (2)

$$\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}+3x=0 \\ \dfrac{dx}{dt}+y=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \overline{x}=C_1e^{kt} \\ \overline{y}=C_2e^{kt} \end{matrix} \qquad \begin{cases} 4kC_1+3C_1-kC_2=0 \\ kC_1+C_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 4k+3 & -k \\ k & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad (4k+3)+k^2=k^2+4k+3=0$$

$$k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm2}{2} \qquad k_1=-3; \qquad k_2=-1$$

$$\begin{cases} \overline{x}=C_1^1e^{-3t}+C_1^2e^{-t} \\ \overline{y}=C_2^1e^{-3t}+C_2^2e^{-t} \end{cases}$$

$$k_1=-3 \qquad \left.\begin{cases} -9C_1^1+3C_2^1=0 \\ -3C_1^1+C_2^1=0 \end{cases}\right\| \to C_2^1=3C_1^1$$

$$k_2=-1 \qquad \left.\begin{cases} -C_1^2+C_2^2=0 \\ -C_1^2+C_2^2=0 \end{cases}\right\| \to C_2^2=C_1^2$$

$$\begin{cases} \overline{x}=C_1^1e^{-3t}+C_1^2e^{-t} \\ \overline{y}=3C_1^1e^{-3t}+C_1^2e^{-t} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^*=A\sin t+B\cos t \\ y^*=C\sin t+D\cos t \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{dx^*}{dt}=A\cos t-B\sin t \\ \dfrac{dy^*}{dt}=C\cos t-D\sin t \end{cases}\right\| \to \left.\begin{cases} D-A=1 \\ 4A-C+3B=0 \\ A+D=1 \\ C-B=0 \end{cases}\right\| \to \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{matrix} x^*=0 \\ y^*=\cos t \end{matrix}\right.$$

Подставляя, получаем ответ.

Ответ:
$$x=C_1^1e^{-3t}+C_1^2e^{-t}$$
$$y=3C_1^1e^{-3t}+C_1^2e^{-t}+\cos t$$

<u>4328</u>. $$\left.\begin{cases} y'=\dfrac{x+y}{z} \\ z'=\dfrac{x-y}{y} \end{cases}\right\| \to \begin{cases} y'z=x+y \\ + \\ z'y=x-y \end{cases}$$

$$y'z+zy'=2x$$

$$(yz)'=2x$$

Обозначив $u=yz$, получаем $u'=2x$.

$$u=\int 2xdx+C_1=x^2+C_1$$

$$yz=x^2+C_1$$

$$\left(\frac{z}{y}\right)'=\frac{z'y-y'z}{y^2}=\frac{x-y-(x+y)}{y^2}=\frac{-2y}{y^2}=\frac{-2}{y}$$

$v=\dfrac{z}{y}$; $\qquad \left(v^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}\cdot v'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{z}{y}\right)'$

$$\left(v^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{z}}\left(\frac{-2}{y}\right)=\frac{-1}{\sqrt{yz}}=\frac{-1}{\sqrt{x^2+C_1}}$$

$$v^{\frac{1}{2}}=\int\frac{-dx}{\sqrt{x^2+C_1}}=-\ln\left|x+\sqrt{x^2+C_1}\right|+\ln C_2$$

$$v^{\frac{1}{2}}=\ln\left|\frac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|=\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{z}{y}=\ln^2\left|\frac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right| \text{ и } zy=x^2+C_1$$

$$z^2=\left(x^2+C_1\right)\cdot\ln^2\left|\frac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|$$

Ответ:
$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+C_1}\cdot\ln\left|\dfrac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right| \\ y=\dfrac{z}{\ln^2\left|\dfrac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|}=\dfrac{\sqrt{x^2+C_1}}{\ln\left|\dfrac{C_2}{x+\sqrt{x^2+C_1}}\right|} \end{cases}$$

<u>Пример</u>: $\qquad xy''=y'(\ln y'-\ln x)$

$$xy''=y'\ln\frac{y'}{x}\Rightarrow y''=\frac{y'}{x}\ln\frac{y'}{x}$$

$\dfrac{y'}{x}=u$; $\qquad y'=xu$; $\qquad y''=u+x\dfrac{du}{dx}$

$$u+x\frac{du}{dx}=u\ln u$$

$$x\frac{du}{dx}=u(\ln u-1)$$

$$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}+\ln C$$

$$\int\frac{d(\ln u)}{(\ln u-1)}=\ln|Cx|$$

$$\ln|\ln u-1|=\ln|Cx|$$

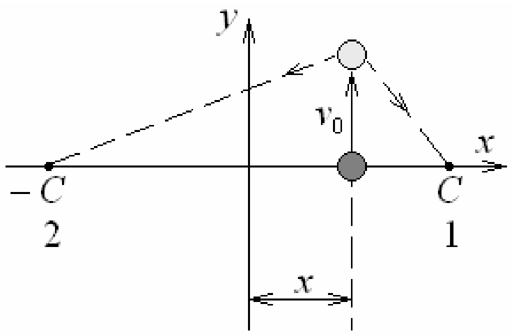
$$\ln u-1=Cx$$

$$\ln\frac{y'}{x} = Cx + 1$$

$$\frac{y'}{x} = e^{Cx+1} \qquad y' = x\cdot e^{Cx+1} \qquad y = e\int x\cdot e^{Cx}dx = \frac{e}{C}\int xd\left(e^{Cx}\right)$$

$$y = \frac{e}{C}x\cdot e^{Cx} - \frac{e}{C}\int e^{Cx}dx = \frac{e}{C}e^{Cx}\left[x - \frac{1}{C}\right] + C_0$$

<u>Задача</u>: Материальная точка массы m протягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию. Коэффициент пропорциональности – k. Расстояние между центрами $2\cdot C$. В начальный момент точка находится на линии соединения центров, на расстоянии a от её середины. Начальная скорость $v_0 \perp$ прямой соединяющей центры. Найти закон движения точки (траекторию).



<u>Решение</u>:

Рассмотрим действующие силы в проекциях на координатной оси:

$$\begin{cases} F_{1x} = k(C - x) \\ F_{2x} = -k(C + x) \end{cases}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{1x} + F_{2x} = k(C - x) - k(C + x) = -2kx$$

$$\begin{cases} F_{1y} = -ky \\ F_{2y} = -ky \end{cases}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_{1y} + F_{2y} = -2ky$$

Постановка задачи:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{2k}{m}x = 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{2k}{m}y = 0 \end{cases}$$

Начальные условия:

$$\left\{\begin{array}{ll} t = 0 & t = 0 \\ x(0) = a & y(0) = 0 \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = 0 & \dfrac{dy}{dt}(0) = v_0 \end{array}\right\}$$

Ищем решения вида:

$$x = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + \frac{2k}{m} = 0 - \text{характеристическое уравнение}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{2k}{m}}\cdot i$$

$$x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)$$

$$y = C_3 \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)$$

Учитывая начальные условия $C_1 = a$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ и $C_4 = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$, получим:

$$x = a\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)$$

$$y = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)$$

Ответ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 \cdot 2k}{mv_0^2} = 1$. Траектория представляет собой эллипс с полуосями a и $v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

Л.12 Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов

Приближённый метод. Представление решения уравнения в виде ряда Тейлора.

Сумма ≈ искомому частному решению

(1) $y'' = F(x, y, y')$

Начальные условия:

(2) $y\big|_{x=x_0} = y_0$

$y'\big|_{x=x_0} = y'_0$

Допустим, что решение $\exists$.

(3) $y = f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots$

Ищем $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, …

Дифференцируем (1) и используем (2).

$(2) \rightarrow f(x_0) = y_0$

(4) $f'(x_0) = y'_0$

$(1) \rightarrow f''(x_0) = y''\big|_{x=x_0} = F(x_0, y_0, y'_0)$

Дифференцируем (1) $\Rightarrow y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')\, y' + F'_{y'}(x, y, y')\, y''$.

(5) $f'''(x_0) = y'''\big|_{x=x_0} = \ldots$ и т.д.

<u>Пример 1</u>. (6) $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 1$

Проинтегрировать приближённо с помощью ряда Тейлора, взяв шесть первых членов разложения, отличных от нуля.

Решение: Найдём пять первых производных:

$y(0)=1$; Подставляя в (6) $x=0 \Rightarrow y'(0)=0^2+1^2=1$

$$y''=2x+2yy' \qquad y'''=2+2(y')^2+2yy''$$

$$y^{IV}=6y'\cdot y''+2y\cdot y''' \qquad y^{V}=6\left(y''\right)^2+8y'\cdot y'''+2y\cdot y^{IV}$$

Подставим $x=0$. $y(0)=1$ $\quad y'(0)=1$ $\quad y''(0)=2$ $\quad y'''(0)=8$

$y^{IV}(0)=28$ $\quad y^{V}(0)=144$

Ответ: $$y=1+\frac{x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{28x^4}{4!}+\frac{144x^5}{5!}+\ldots$$

Пример 2. (7) $y''=x+y^2$; $\quad y(0)=0$; $\quad y'(0)=1$

Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения.

Решение: дифференцируем уравнение (7):

$$y'''=1+2y\cdot y' \qquad y^{IV}=2y\cdot y''+2(y')^2$$

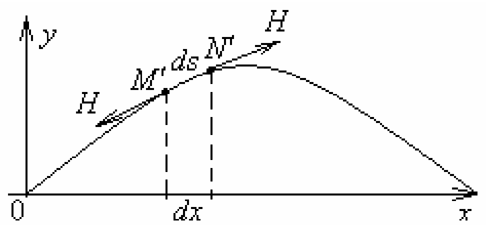
$$y^{V}=2y\cdot y'''+6y'\cdot y'' \qquad y^{VI}=2y\cdot y^{IV}+8y'\cdot y'''+6(y'')^2$$

При $x=0$: $y(0)=0$ $\quad y'(0)=1$ $\quad y''(0)=0$ $\quad y'''(0)=1$

$y^{IV}(0)=2$ $\quad y^{V}(0)=0$ $\quad y^{VI}(0)=16$

Решение имеет вид: $$y=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{16x^6}{6!}+\ldots=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\ldots$$

Л.13 Уравнение колебания струны



Струна – свободно изгибающаяся и невесомая нить длиной l. Она закреплена в точках $x=0$ и $x=l$. H – натяжение струны. В момент времени $t=0$ струна выводится из положения равновесия. Начальные скорости для точек задаются.

(.) $M(x)$ колеблется вдоль оси Oy: $y=y(x,t)$

Рассмотрим малые колебания струны, при которых y и $\frac{\partial y}{\partial x}$ малы (пренебрегаем их квадратами), тогда $ds=\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}dx\approx dx$ - считаем длину струны неизменной.

φ_1,φ_2 – углы наклона касательной в точках M' и N'.

Проекция сил натяжения на Oy:

$$H\left(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2\right)\equiv H\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{N'}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{M'}\right]=H\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

Здесь заменим: $\sin\varphi = \dfrac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} \approx tg\varphi = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ и приращение функции $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ заменим её дифференциалом.

Масса элемента: $\rho ds = \rho dx$, где ρ - линейная плотность струны.

По закону Ньютона: масса элемента ρdx на ускорение $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ равняется силе, действующей на этот элемент.

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

(1) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$,- дифференциальное уравнение в частных производных,

где $a^2 = \dfrac{H}{\rho}$. Уравнение (1) называется *волновым уравнением*.

Граничные условия:

(2) $y(0,t) = 0$, $y(l,t) = 0$ - концы струны закреплены

(3) $y(x,0) = f(x)$, $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g(x)$ - начальные условия

Частные решения ищем в виде: $y = X(x) \cdot T(t)$, тогда уравнение (1):

$$X \cdot T'' = a^2 X'' \cdot T$$

$\dfrac{T''}{T} = a^2 \dfrac{X''}{X} \equiv -a^2\lambda^2$ - обозначим при $\lambda > 0$

$$\begin{cases} T'' + a^2\lambda^2 T = 0 \\ X'' + \lambda^2 X = 0 \end{cases}$$

Их решения имеют вид: $\begin{matrix} T = A\cos a\lambda t + B\sin a\lambda t \\ X = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x \end{matrix}$

Для того, чтобы функция $y = XT$ удовлетворяла предельным условиям (граничным) им должна удовлетворять функция *X*.

При $x = 0$ $C = 0$

При $x = l$ $\sin\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda l = n\pi$

$\lambda_1 = \dfrac{\pi}{l}$; $\lambda_2 = \dfrac{2\pi}{l}; \ldots \lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}$, где $n = 1,2,3,\ldots$

Полагая при $\lambda = \lambda_n$ $AD = a_n$ $BD = b_n$ получим

$y_n = (a_n \cos a\lambda_n t + b_n \sin a\lambda_n t)\sin\lambda_n x$ последовательность $n = 1,2,3,\ldots$ частных решений.

Сумма этих решений: (4) $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos a\lambda_n t + b_n \sin a\lambda_n t)\sin\lambda_n x$

Выберем a_n и b_n так, чтобы удовлетворить <u>начальным условиям</u>

(5) $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-a_n a\lambda_n \sin a\lambda_n t + b_n a\lambda_n \cos a\lambda_n t)\sin\lambda_n x$

Подставим в (4) и (5) $t = 0$ учтём (3), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n x = f(x) \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n b_n \sin \lambda_n x = g(x)$$

Если $f(x)$ и $g(x)$ раскладываются в ряд Фурье, то

(6) $$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin \lambda_n x dx$$

$$b_n = \frac{2}{a\lambda_n l}\int_0^l g(x)\sin \lambda_n x dx$$

Получили полное решение задачи в виде ряда (4) с коэффициентами (6). Объединяя в (4) оба члена в скобках, перепишем разложение.

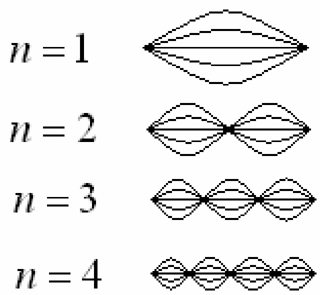
$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi a}{l}t + \alpha_n\right)$$

Полное колебание струны слагается из ряда отдельных колебаний

$$y_n = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi a}{l}t + \alpha_n\right)$$

Участвующие в таком элементарном колебании точки струны все колеблются с одной и той же <u>частотой</u>, которой отвечает <u>тон определённой высоты</u>. Амплитуда колебания каждой точки зависит от её положения, она равна:

$$A_n\left|\sin\frac{n\pi}{l}x\right|$$



Вся струна разбивается на *n* равных участков, причём точки одного и того же участка находятся всегда в одной и той же фазе, а точки соседних участков в прямо противоположных фазах. Точки покоя – «узлы». Середины участков – «пучности».

Описанное явление носит название <u>стоячей волны</u>.

Основной тон определяется первой составляющей y_1 с частотой $\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{H}{\rho}}$ и периодом $T = 2l\sqrt{\frac{\rho}{H}}$.

Остальные тона или <u>обертоны</u>, издаваемые струной одновременно с основным, характеризуют определённую окраску звука, или его <u>тембр</u>. Если нажать пальцем в середине струны, то сразу заглохнут как основной тон, так и нечётные обертоны, для которых там была пучность. Чётные обертоны все сохранятся (там был для них узел). Среди них роль основного будет играть второй обертон с периодом $T_2 = \frac{1}{2}T_1$, и струна будет звучать в <u>октаву</u> первоначального тона.

Л.14 Задача о распространении тепла в конечном стержне

Пусть имеем тонкий однородный стержень длины l расположенный между точками $x = 0$ и $x = l$ по оси *x*. Сечение стержня, площади σ мы считаем настолько малым, что всем точкам сечения приписывается одна и та же температура. Боковая поверхность стержня изолирована от окружающей среды. В начальный момент времени $t = 0$ дано распределение температуры U вдоль

стержня: $f(x)$ $\quad (x \in [0, l])$. Указан тепловой режим, поддерживаемый на концах стержня.
Определить температуру точек стержня: $U(x, t)$.
Количество тепла, которое за время dt пройдёт через левое сечение внутрь элемента стержня:

$$-k \cdot \sigma \cdot \frac{\partial U}{\partial x} dt,$$

где k – коэффициент внутренней теплопроводности стержня,
минус перед уравнением, т.к. тепло переходит от более нагретых мест к менее нагретым.
Через правое сечение <u>выйдет</u> за то же время количество тепла:

$$-k \cdot \sigma \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{dx^2} dx \right) dt$$

Изменив знак «минус», получим количество тепла, которое войдёт внутрь элемента. Общее количество тепла, накопившееся в выделенном элементе за время dt, будет:

$$k \cdot \sigma \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx dt$$

Это количество можно подсчитать и иначе, т.к. обусловлено повышение температуры на $\frac{\partial U}{\partial t} dt$, затраченное на это тепло: $\quad c \cdot \rho \cdot \sigma \cdot dx \cdot \frac{\partial U}{\partial t} dt$.
Здесь c – теплоёмкость, ρ – плотность вещества стержня.
Приравниваем $\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$. $\quad a = \sqrt{\frac{k}{c \cdot \rho}}$
Это дифференциальное уравнение в частных производных называется уравнением теплопроводности.
Предельные (граничные) условия: $\quad U(0, t) = U(l, t) = 0 \quad (t \geq 0)$
Начальные условия: $\quad U(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq l)$
Пусть $U = X \cdot T$, тогда $X \cdot T' = a^2 \cdot X'' \cdot T$ или $\frac{T'}{T} = a^2 \frac{X''}{X} \equiv -a^2 \cdot \lambda^2 \quad (\lambda > 0)$.
Получим $\begin{cases} T' + a^2 \cdot \lambda^2 \cdot T = 0 \\ X'' + \lambda^2 \cdot X = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = C \cdot e^{-a^2 \cdot \lambda^2 \cdot t} \\ X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \end{cases}$.
Т.к. $X \cdot T$ удовлетворяет граничным (предельным) условиям, необходимо:

$$A = 0, \qquad \lambda \cdot l = n\pi, \qquad (n = 1,2,3,...)$$

Пусть $BC = b_n$, получим ряд частных решений:

$$U_n = b_n \cdot \exp\{-a^2 \lambda_n^2 t\} \sin \lambda_n x \qquad (n = 1,2,3,...)$$

Общее решение представим в виде ряда:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x$$

Учитывая начальное условие, положим: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x), \qquad (0 \le x \le l)$

Отсюда: $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$

Пусть теперь на конце $x = l$ поддерживается постоянная температура U_0, а второй конец $x = 0$ изолирован, так что через него никакого движения тепла не происходит. Тогда видоизменятся предельные (граничные) условия:

$$U(l,t) = U_0; \qquad \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = 0$$

Начальное условие сохраним: $U(x,0) = f(x) \qquad (0 \le x \le l)$

Введём новую функцию v, так что $U = U_0 + v$, тогда для v:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Предельные условия заменяются более простыми: $\begin{cases} v(l,t) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0 \end{cases}$, а начальное условие: $v(x,0) = f(x) - U_0$.

Пусть $v = X \cdot T$, получим: $\begin{cases} T = Ce^{-a^2\lambda^2 t} \\ X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \end{cases}$, т.к.

$\frac{\partial X}{\partial x} = -\lambda A \sin\lambda x + \lambda B \cos\lambda x,$ то второе условие дает $B = 0$, а из первого получим $\cos\lambda l = 0$.

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2l}; \qquad \lambda_2 = 3\frac{\pi}{2l}; \qquad \lambda_3 = 5\frac{\pi}{2l}; \ \ldots; \qquad \lambda_n = (2n-1)\frac{\pi}{2l}; \ \ldots$$

Тогда частные решения: $v_n = a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \cos\lambda_n x, \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$

Общее решение: $v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \cos\lambda_n x$

Начальное условие приводит к разложению вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l} = f(x) - U_0$$

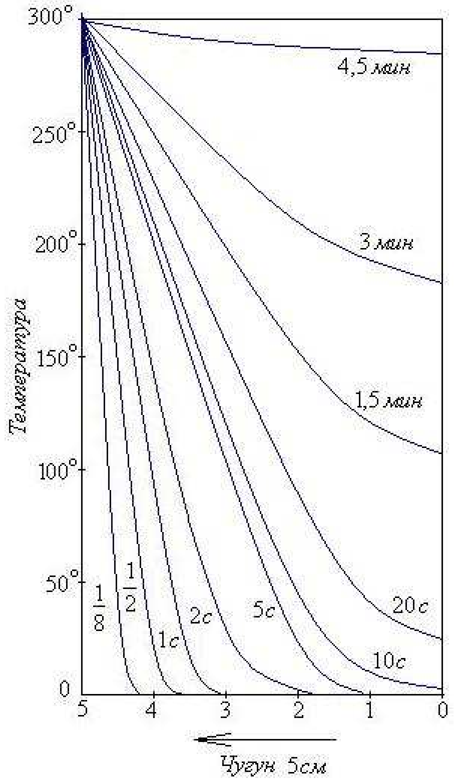
Отсюда:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l} dx - \frac{4}{\pi} U_0 \frac{1}{2n-1}$$

$$U = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \cos\lambda_n x$$

В частности, если $f(x) = 0$, то $U = U_0 - \frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x$.

При $U_0 = 300$ и $a^2 = 0{,}139$ были вычислены $U(x,t)$.



Графики распределения температур в чугунном стержне в различные моменты времени.

$\rho = 0{,}0072 \,{}^{кг}\!/_{см^3}$

$c = 0{,}13 \,{}^{кал}\!/_{кг \cdot {}^\circ C}$

$k = 0{,}00013 \,{}^{кал}\!/_{см \cdot {}^\circ C \cdot c}$

$a^2 = \dfrac{k}{c \cdot \rho} = 0{,}139$

Вопросы к экзамену

1. Понятие дифференциального уравнения. Общее и частное решения. Особые решения.
2. Геометрическая интерпретация общего интеграла дифференциального уравнения.
3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
4. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Задача Коши.
5. Дифференциальные уравнения 1.го порядка, приводящиеся к однородным.
6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
7. Уравнение Бернулли.
8. Дифференциальные уравнения, содержащие дифференциалы произведения и частного.
9. Уравнение Риккати.
10. Дифференциальное уравнение 1-го порядка в полных дифференциалах.
11. Интегрирующий множитель. Теорема о нём.
12. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не разрешённые относительно производной. Понятие особого интеграла.
13. Уравнения Лагранжа и Клеро.
14. Уравнения высших порядков. Уравнения допускающие понижение порядка.
15. Общая теория линейного дифференциального уравнения n-го порядка.
16. Общее решение однородного уравнения.
17. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка. Его свойства.
18. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) (на примере дифференциального уравнения 2-го порядка).
19. Понижение порядка линейного неоднородного дифференциального уравнения $n-$ го порядка при известном одном частном решении соответствующего линейного однородного уравнения.
20. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского для дифференциального уравнения второго порядка.
21. Однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Определитель Вронского.
22. Метод неопределённых коэффициентов (дифференциальное уравнение 2-го порядка).
23. Преобразование линейного дифференциального уравнения к линейному с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.
24. Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
25. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов.
26. Составление дифференциальных уравнений. Геометрические задачи.
27. Составление дифференциальных уравнений. Физические задачи.
28. Приведение к уравнению в частных производных. Уравнение колебания струны. Постановка задачи.
29. Решение уравнения колебаний струны.
30. Уравнение теплопроводности. Постановка задачи.
31. Решение уравнения теплопроводности.

Литература:

1) Н. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление II. 1 глава, 1985.
2) А. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. 1979.
3) В.К. Романко. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. Физматлит. 2000.
4) M. Tenenbaum, H. Pollard. Ordinary differential equations. Dover publications. 1985.